1 **CHAPITRE 1**

Hydraulique des sols

1.1 Introduction

L'eau joue un rôle important dans de nombreux secteurs de l'activité humaine (transport fluvial et maritime, construction, agriculture, environnement, ...) et elle fait l'objet de beaucoup d'attention dans plusieurs branches des sciences fondamentales et appliquées : mécanique des fluides et hydraulique, hydrogéologie, météorologie, mécanique des sols et des roches, science du sol. Le développement parallèle de ces disciplines n'a pas permis qu'elles convergent vers une description unique des phénomènes physiques. Ces différences sont pour la plupart dues aux particularités des problèmes traités dans leurs champs d'application : il n'existe pas de théorie générale de l'eau sur le globe terrestre, malgré le rôle unificateur de la mécanique et de la physico-chimie. Chaque discipline porte donc un regard particulier sur l'eau et nous décrirons dans ce chapitre celui de la mécanique des sols et des roches.

En mécanique des sols et des roches, on s'intéresse à l'eau qui séjourne ou circule dans les interstices (pores ou fissures) des matériaux. L'hydraulique des sols et des roches est donc une forme d'hydraulique des milieux poreux et fissurés et, à ce titre, elle se rapproche de l'hydrogéologie et de la mécanique des fluides appliquée à la production du pétrole et du gaz naturel, et de la branche de la mécanique des milieux continus qui a reçu le nom de mécanique des milieux poreux ou poromécanique.
L'eau a deux formes d'interaction avec les milieux poreux : elle se déplace dans les pores et elle exerce une pression sur la phase solide et la déforme. Ces deux phénomènes coexistent en général. Ils ont reçu des noms différents dans chaque discipline. En mécanique des sols on distingue :

1) l'hydraulique des sols, qui étudie les écoulements dans un milieu poreux indéformable ;

2) la (théorie de la) consolidation, qui étudie les écoulements transitoires dans un milieu poreux déformable, en couplant l'écoulement de l'eau et les déformations du sol au cours du temps.

L'hydraulique des sols fournit les instruments du calcul des débits (débit à travers un barrage, débit vers une excavation, débit vers un puits de pompage,...). Elle donne aussi les champs de pressions d'eau qui permettent d'analyser la stabilité de certains ouvrages (pentes, soutènements, barrages, excavations,...).

La théorie de la consolidation s'applique au calcul au cours du temps des déformations des massifs de sol soumis à des charges (fondations, remblais) ou à des modifications de conditions hydrauliques (abaissement naturel ou artificiel du niveau des eaux souterraines). Nous l'étudierons au chapitre 2, après avoir décrit les déformations des massifs de sols et de roches.

Ce chapitre1 est dédié à l'hydraulique des sols.

1.2 L'eau dans les sols

Les sols et les roches contiennent en temps normal de l'eau, dans toutes les régions du globe où il pleut, mais cette eau ne représente qu'une petite partie de l'eau existant à la surface de la Terre. L'essentiel de cette eau (97,2%) est l'eau salée des océans et des mers. L'eau douce est elle-même répartie dans les glaciers (2%), dans les nappes souterraines profondes et superficielles (0,58%), dans les lacs et les cours d'eau (0,16%) et enfin dans l'atmosphère, sous forme de vapeur d'eau (0,001%).

Les précipitations arrivant à la surface de la terre sous forme de pluies ou de neige constituent la quasi-totalité des apports d'eau au sol (Figure 1.1). Cette eau peut:

- être stockée sous forme de neige et de glace ;
- humidifier le sol et s'infiltrer ;
- ruisseler en surface et alimenter rivières et lacs ;
- s'évaporer directement à la surface du sol.

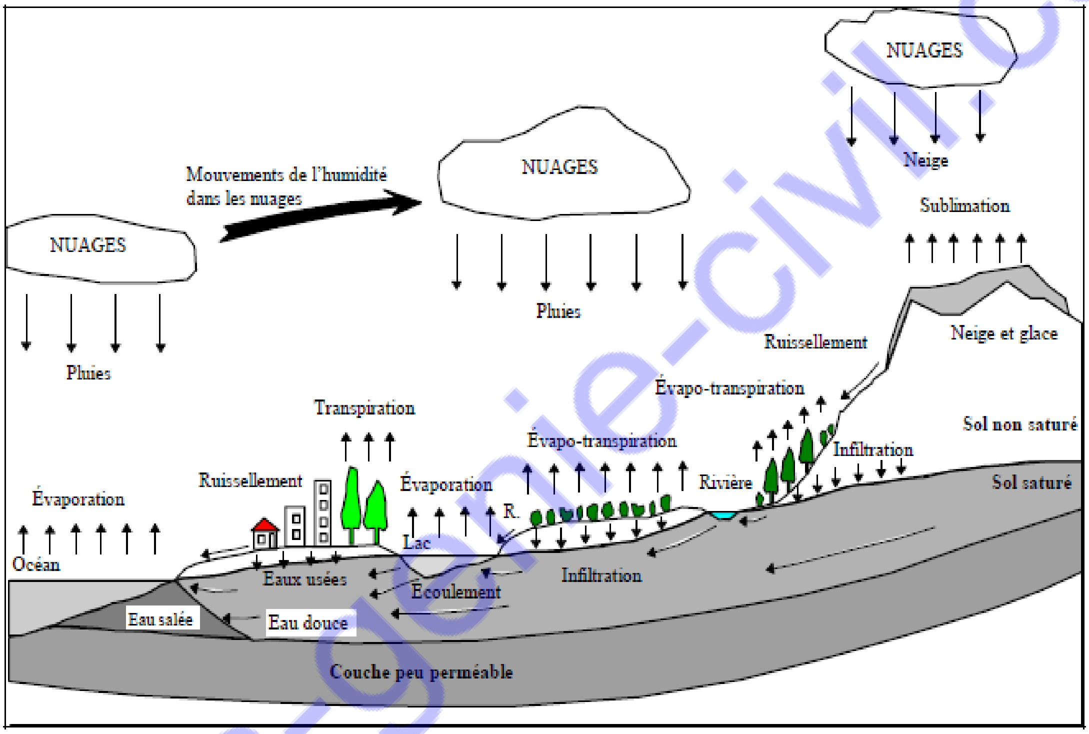


***Figure 1.1** : Le cycle de l'eau.*

La transpiration des végétaux va dans le même sens que l'évaporation sur le sol : les racines des végétaux extraient une partie de l'eau du sol, qui s'évapore par les feuilles. L'évaporation et la transpiration sont en général regroupées sous le nom d'«évapotranspiration». L'eau stockée sous forme de neige ou de glace à la surface des continents peut s'évaporer directement (sublimation), mais elle subit pour l'essentiel en différé les mêmes évolutions que l'eau de pluie : infiltration et ruissellement lors de la fonte, avec une part plus grande d'infiltration car l'alimentation est plus lente que lors d'une pluie.
Moins de 20 % des précipitations s'infiltre dans le sol et s'enfonce par gravité jusqu'aux couches imperméables de sol ou jusqu'au roc (substratum rocheux), créant la plus part du temps, deux grandes zones : une zone non saturée dans la partie supérieure et une zone saturée dans la partie inférieure. Dans la zone non saturé, le sol peut varier d'un état sec à un état voisin de la saturation complète. Dans certaines conditions, cette zone peut même être absente, le sol ne comporte qu'une seule zone, la zone saturée.

1.2.1Nappes souterraines

Une nappe souterraine est une accumulation d'eau libre. Suivant sa position et les conditions qui l'entourent, la nappe d'eau souterraine peut prendre trois formes (Figure 1.2) :

- la nappe d'eau libre (phréatique) ;
- la nappe perchée ;
- la nappe captive.

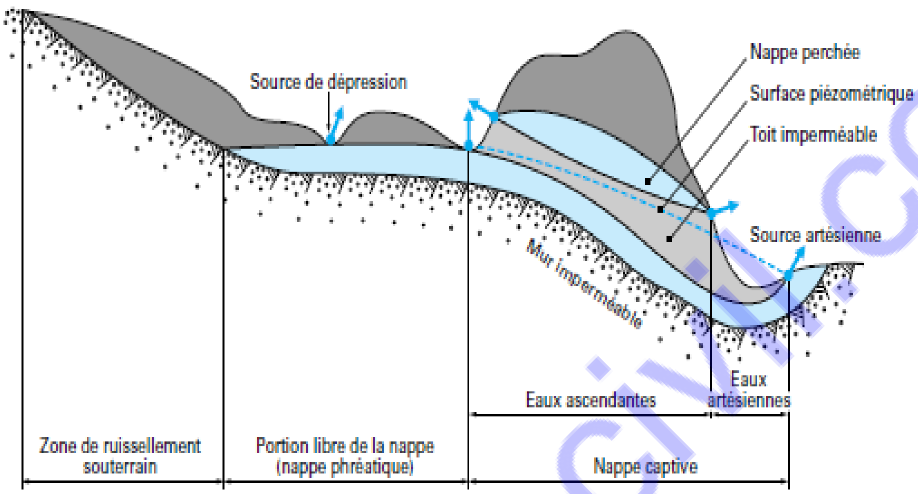


Figure 1.2 *: Les nappes d'eau souterraine.*

1.2.1.1 La nappe libre (phréatique)

La nappe libre, plus souvent appelée nappe phréatique, est une quantité d'eau plutôt volumineuse qui repose sur la première couche importante de sol imperméable rencontrée à partir de la surface du sol. C'est la plus fréquente des trois. Elle est habituellement composée de deux zones de saturation. Sa surface libre n'est pas horizontale comme celle d'un lac, mais tend plutôt à suivre la configuration du sol. Par exemple, elle s'élèvera sous les collines et les montagnes pour s'abaisser en descendant vers le fond des vallées. La profondeur de la surface libre peut être également influencée par les conditions climatiques, les marées et l'activité humaine. Mentionnons qu'elle se situe très prés de la surface du sol dans les régions très humides et quelle s'en éloigne considérablement dans les régions arides.

1.2.1.2 La nappe perchée

La nappe perchée est une petite quantité d'eau qui repose au dessus de la nappe phréatique, sur couche de matériau imperméable de dimensions restreintes.

1.2.1.3 Nappe captive

La nappe captive est une accumulation d'eau emprisonnée entre deux matériaux imperméables. Elle généralement sous pression, et la hauteur de sa surface libre est différente de celle de la nappe phréatique.

1.3 État de l'eau dans les sols

1.3.1 Généralités

Les sols, on le sait, sont constitués d'un empilement de particules de formes diverses (squelette solide), séparées par des espaces (vides) appelés interstices ou pores et que les deux phases liquide et gazeuse occupent cet espace dans des proportions définies par le degré de saturation (Figure 1.3). La taille des pores est elle-même très variable et certains de ces pores sont isolés, tandis que d'autres forment un réseau de vides communicants.
En présence d'eau et d'air, ces pores seront le lieu de phénomènes de capillarité, qui dépendent principalement de la taille des vides et du degré de saturation.
Par ailleurs, nous connaissons aussi l'affinité des particules argileuses avec les molécules d'eau. Dans les sols argileux, l'eau située à proximité des surfaces des particules possède des propriétés mécaniques particulières et peut être immobilisée si les pores sont très fins.

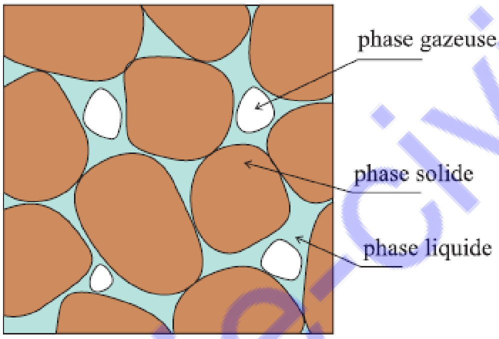


Figure 1.3: *Élément de sol constitué de grains solides entourés de vides remplis d'eau et d'air.*

1.3.2 Différents états hydriques dans les sols

L'eau peut se trouver dans plusieurs états à l'intérieur d'un sol, suivant l'intensité des forces liant ses molécules aux particules solides. Elle peut se trouver généralement sous quatre états (Figure 1.4) :

1) ***l'eau de constitution*** entrant dans la composition chimique des minéraux qui composent les particules du sol (fraction fine argileuse) ;
2) ***l'eau liée ou adsorbée*** à la surface des grains contrainte par les forces d'attraction moléculaire et les forces électrostatiques ;
3) ***l'eau capillaire***, qui dans les sols non saturés, en présence d'air ou d'autres gaz, est retenue dans les pores (vides) les plus fins du sol par les forces capillaires. Ces liaisons d'eau avec les particules du sol dépendent de la nature et de la dimension des particules ;
4) ***l'eau libre***, circulant dans les pores du sol sous l'effet des forces da gravité ou de gradient de pression.

Ces différents états hydriques dans les sols dépendent de la compacité, de la teneur en eau, de la nature et taille des graines et de leur distribution.

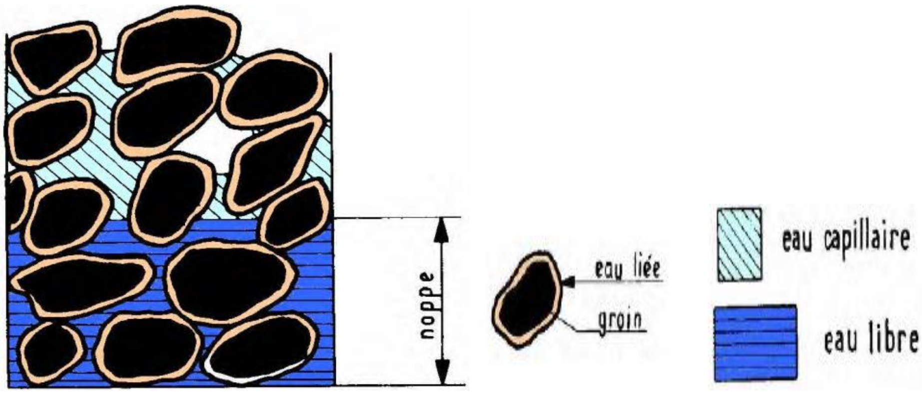


Figure1.4: *Différents états hydriques dans le sol.*

Les liaisons de l'eau avec les particules du sol dépendent de la nature minéralogique des particules et de leurs dimensions. Dans les **sols fins argileux**, l'eau peut se trouver dans les quatre états indiqués ci-avant et la hauteur de la frange capillaire peut atteindre plusieurs dizaines de mètres au-dessus de la surface de la nappe. Dans les **sables**, il n'y a pas d'eau de constitution et en général pas d'eau liée et la frange capillaire a quelques centimètres de hauteur. Au-delà de la hauteur limite d'ascension capillaire (frange capillaire) l'eau n'est plus continue, elle est **discontinue**, dans l'espace des pores (Figure 1.5) et n'intervient pas de façon autonome dans le comportement mécanique du sol.

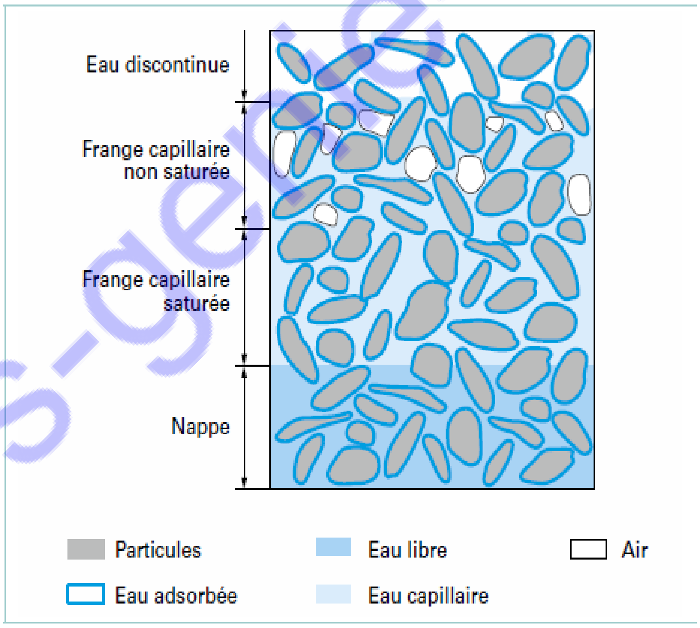


Figure1.5 : *Différents états hydriques dans le sol.*

1.3.3 Sols saturés : eau liée, eau libre

Dans les sols saturés, l'eau remplit tous les vides entre les particules. Si l'on exclut l'eau qui entre dans la composition des minéraux (**eau de constitution**), il est nécessaire de distinguer ***l'eau liée***, qui est attachée à la surface des particules solides par des forces d'interaction moléculaire de nature essentiellement électrique, et ***l'eau libre ou gravifique***, qui peut se déplacer entre les particules sous l'effet des forces de pesanteur ou des gradients de pression (Figure 1.6).

1.3.3.1 Eau libre (gravifique)

L'eau libre (gravifique) occupe **la zone saturée (nappe).** Elle s'écoule librement et s'accumule en **une nappe d'eau libre** à laquelle on peut s'alimenter par pompage. La surface de la nappe d'eau libre porte le nom de surface libre. Pour connaître sa profondeur, on se sert le plus souvent d'un tubage de forage ou ***d'un piézomètre ouvert*** (une sorte de tube perméable qu'on introduit dans le sol ou dans un trou de forage). L'eau de la nappe s'infiltre dans le tubage ou piézomètre et finit par demeurer stationnaire à un certain niveau où l'on évalue la profondeur au moyen d'une sonde électrique ou d'un fil à plomb. C'est le niveau de la surface libre qu'on appelle d'ailleurs souvent ***surface piézométrique ou niveau piézométrique***.
L'eau libre est celle qui est en dehors du champ d'attraction des particules et peut, donc, se déplacer sous l'effet de la gravité ou des gradients de pression.

1.1.1.1 Eau liée

L'eau liée est attachée aux particules de la fraction la plus fine des sols, qui sont en quasi-totalité de nature argileuse. Ces particules portent à leur surface des charges électriques négatives. Le champ électrique créé par ces charges oriente les molécules dipolaires de l'eau au voisinage de la particule (les ions H^+ du dipôle H^+-OH^- sont attirés vers la surface). L'interaction électrique entre l'eau et les particules argileuses décroît rapidement quand on s'éloigne de la particule (Figure 1.6).
L'importance dans le sol de l'eau liée dépend de la surface des particules sur laquelle les molécules d'eau peuvent s'adsorber. Rappelons que cette surface, que l'on peut aussi définir comme surface totale des pores rapportée à un volume unité de matériau, est appelée **surface spécifique**.

Certains auteurs on noté que l'eau liée (adsorbée) englobe l'eau ***hygroscopique*** et l'eau **pelliculaire** (Figure 1.6):

1) ***l'eau hygroscopique*** est caractérisée par les premières couches de molécules d'eau qui sont fortement liées et ne se déplacent pratiquement pas par rapport à la particule. Leur densité peut atteindre 1,5 fois celle de l'eau pure et leur viscosité est très forte. Elle est maintenue par des forces d'attraction et ne peut donc pas s'écouler sous l'effet de forces de gravité, et il est même impossible de l'évacuer par drainage ou pompage. Ces forces d'attraction varient selon la nature des sols. Dans le cas des argiles, elles sont très grandes.
Les couches suivantes sont plus faiblement liées mais ont un comportement visqueux différent de celui de l'eau libre (eau aux propriétés usuelles) : Elles représentent l'eau pelliculaire.

2) ***l'eau pelliculaire*** est, donc, l'eau qui entoure la couche d'eau hygroscopique. Ses propriétés physiques et mécaniques sont influencées par le champ électrique de la particule. L'épaisseur de la couche d'eau liée atteint 0,1 µm. La zone de transition entre l'eau liée et l'eau libre peut s'étendre jusqu'à 0,4 à 0,5 µm de la surface de la particule.

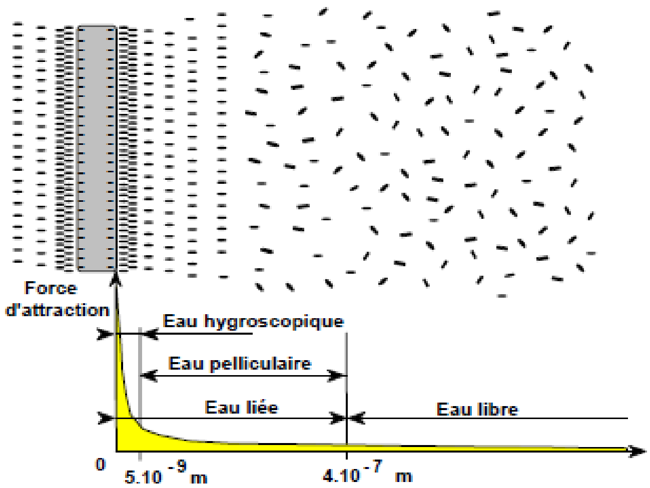


Figure 1.6 *: Structure de la couche d'eau à la surface d'une particule argileuse dans un sol saturé.*

1.1.2 Sols non saturés : Phénomènes capillaires

Dans la zone non saturée (au dessus de la nappe), en plus de ***l'eau liée*** (définie précédemment), on trouve ***l'eau capillaire*** qui est retenue dans les vides du sol par capillarité formant ainsi la frange capillaire (Figures 1.4 et 1.5).

Contrairement à un sol saturé qui est un milieu biphasique (solide et liquide), dans un sol non saturé, les pores sont partiellement remplis d'eau et d'air. Autrement dit, un sol non saturé est un milieu au moins triphasique (phases solide, liquide et gazeuse). On considère que l'eau représente la phase liquide, tandis que la phase gazeuse est constituée d'air.
Selon les quantités d'eau et de gaz se trouvant dans les pores d'un sol, et aussi selon la dimension des particules et des pores, l'eau et le gaz peuvent être dans un état continu ou au contraire discontinu, comme l'illustre la figure 1.7. Il est évident que l'eau se déplacera plus facilement d'un point à un autre si l'eau des pores est continue et que le gaz se déplacera aussi différemment selon qu'il est en bulles ou bien remplit les pores.

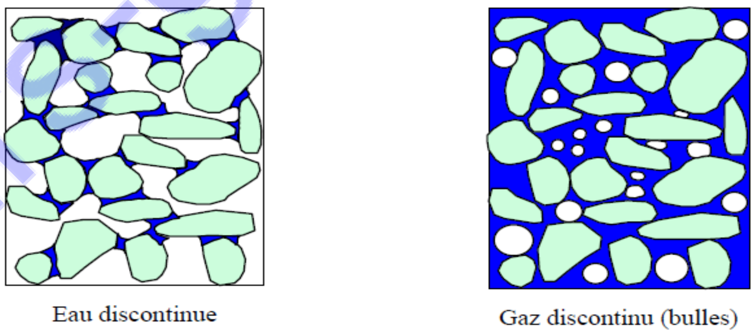


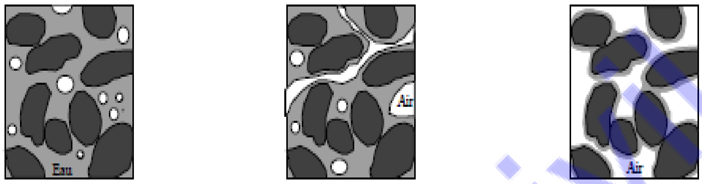
Figure 1.7 *: Répartition de l'eau et du gaz dans les pores du sol.*

Suivant le degré de saturation nous distinguons trois modes d'interactions entre les phases du sol (Figure 1.8) déterminant *trois catégories* de sols non saturés :

- ***sol presque saturé***: la phase liquide est continue et l'eau peut circuler sous l'influence de la pesanteur (on parle souvent pour cette raison d'eau ***gravifique ou « funiculaire »).*** La phase gazeuse est discontinue et ne se déplace pas de façon autonome. Les sols sont presque saturés pour des degrés de saturation supérieurs à 85 % (Figure 1.8a) ;

- ***sol à la saturation d'équilibre***: la phase liquide est encore continue mais l'eau ne peut plus se déplacer sous la seule influence de la pesanteur. La phase gazeuse (air) est aussi continue mais ne circule, en général, pas (Figure 1.8b) ;

- ***sol faiblement saturé***: l'eau entoure les particules et occupe des volumes discontinus à leurs points de contact, et dans ce cas, on parle d'eau ***«pendulaire »*** (Figure 1.8c). La phase liquide est toujours continue par l'intermédiaire des pellicules d'eau adsorbée mais ne se déplace que très lentement. La phase gazeuse (air) est continue mais généralement immobile. L'évaporation de l'eau à l'intérieur des pores du sol, bien que très lente, peut devenir un phénomène important.



a. Sol presque saturé b. Sol à la saturation d'équilibre c. Sol faiblement saturé

Figure 1.8 *: Etats de saturation du sol.*

Le passage de l'état presque saturé à l'état de saturation d'équilibre peut se produire par un simple écoulement gravitaire de l'eau. Pour passer à l'état faiblement saturé, il faut l'intervention d'un autre phénomène : évaporation ou aspiration de l'eau par les racines des végétaux, par exemple. Si la teneur en eau continue de diminuer, que ce soit sous l'action des phénomènes naturels cités ci-dessus ou par étuvage, on ne conserve plus dans le sol que l'eau liée, appelée aussi eau ***hygroscopique.***

Enfin, il faut savoir que les interactions entre les différentes phases sont contrôlées par leur tension superficielle. Cette interaction air-eau-solide rend le comportement mécanique du sol non saturé beaucoup plus complexe que celui d'un sol saturé. La pression d'eau est toujours inférieure à la pression d'air dans un sol non saturé. Cette différence de pression entre l'air et l'eau, appelée **tension capillaire**. En géotechnique cette tension est appelée **succion**, et elle est à l'origine de certains comportements hydromécaniques particuliers. Les sols non saturés ont donc des propriétés de déformabilité et de résistance qui varient en fonction de facteurs tels que la nature minéralogique des particules (squelette du sol), l'état initial (la teneur en eau, le degré de saturation, la porosité, la pression de l'eau, la pression de l'air, les charges mécanique, etc.).

1.2 Contraintes totales et contraintes effectives

Dans un massif de sol saturé à surface horizontale, baigné par une **nappe en équilibre** (Figure 1.9), on peut calculer la contrainte totale verticale σ_v et la pression de l'eau u au point P situé à la profondeur z :

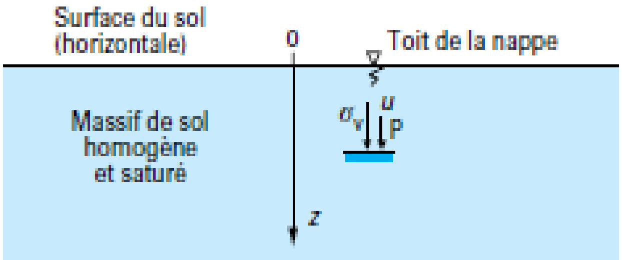


***Figure 1.9** : Contrainte géostatique dans une nappe au repos.*

- pour la **contrainte totale verticale**, l'équilibre de la couche de sol située au-dessus du point P implique que la contrainte soit égale à :

$$\boldsymbol{\sigma_v = \rho.g.z = \gamma.z.} \quad \text{Avec :}$$

ρ = masse volumique du sol saturé ;
g = accélération de la pesanteur, habituellement prise égale à 10 m/s2 en mécanique des sols ;
z = profondeur du point P, comptée positivement vers le bas à partir de la surface du sol (convention de la mécanique des sols) ;
γ = poids volumique du sol saturé.

- pour l'**eau** qui remplit les pores du sol, la distribution des pressions est la même que dans une nappe en équilibre hydrostatique et la pression interstitielle u est :

$$\boldsymbol{u = \rho_w.g.z = \gamma_w.z.} \quad \text{Avec :}$$

ρ_w = masse volumique de l'eau ;
g = accélération de la pesanteur, habituellement prise égale à 10 m/s^2 en mécanique des sols ;
z = profondeur du point P, comptée positivement vers le bas à partir de la surface du sol (convention de la mécanique des sols) ;
γ_w = poids volumique de l'eau.

Donc la contrainte effective verticale au point P est :

$$\boldsymbol{\sigma_v' = \sigma_v - u = (\rho - \rho_w).g.z = (\gamma - \gamma_w).z.}$$

Sachant que $\rho' = (\rho - \rho_w)$ est la masse volumique déjaugée et $\gamma' = (\gamma - \gamma_w)$ est le poids volumique déjaugé, alors **:**

$$\boldsymbol{\sigma_v' = \rho'.g.z = \gamma'.z.}$$

1.3 Hydraulique des sols saturés

1.3.1 Généralités

Il est pratiquement impossible de décrire de façon détaillée l'écoulement de l'eau entre les particules d'un sol. La forme et les connections des vides sont inconnues dans un empilement quelconque de particules. Les définitions relatives à l'hydraulique des sols sont pour cette raison établies sur des valeurs moyennes du volume des pores, des quantités d'eau qui se déplacent, etc. Il est évident que seuls les problèmes d'écoulements dans des sols assez fins peuvent être analysés en pratique avec les outils décrits dans ce chapitre.

L'eau se déplacera dans un sol si et seulement si, des forces génératrices de ce déplacement se développent.
Si nous nous plaçons dans la zone saturée sous la nappe, les mouvements de l'eau peuvent être dus soit ***à la gravité***, soit à ***un gradient hydraulique***. Les mouvements liés à la gravité sont évidemment descendants, les autres dépendront des gradients appliqués et des propriétés locales des sols (**seule l'eau libre est concernée**).

En mécanique des fluides, il existe différentes façons de décrire ou de classifier les écoulements : ils peuvent être permanents ou transitoire selon que les conditions varient ou non dans le temps. De plus, l'écoulement peut être unidimensionnel, bidimensionnel, voire tridimensionnel :

1) Un écoulement ***unidimensionnel*** est celui pour lequel tous les paramètres comme la pression, la vitesse, la température, etc. sont constants dans n'importe quelle direction perpendiculaire à l'écoulement ; bien entendu, ces paramètres peuvent varier selon la direction de l'écoulement.
Par exemple, un écoulement qui se produit dans une conduite dont la section varie lentement peut être étudié approximativement en supposant que la vitesse de l'écoulement est perpendiculaire à la section droite et est uniforme dans cette section. La vitesse ne dépend donc que d'une seule dimension qui est l'abscisse curviligne de l'axe de la conduite, d'où le nom d'écoulement unidimensionnel donné à ce type d'écoulement ;

2) Un écoulement ***bidimensionnel*** est un écoulement dont les vitesses sont toutes parallèles à un plan et dont les composantes de ces vitesses ne dépendent que des coordonnées de ce plan. C'est le cas très courant des ouvrages ayant une grande dimension orthogonalement à la direction de l'écoulement et homogènes suivant cette dimension (digues, tranchées, parois, rideaux de palplanches...). Dans un écoulement bidimensionnel, tous les paramètres sont donc constants sur des plans parallèles, alors que pour l'écoulement tridimensionnel, les paramètres varient suivant les trois directions orthogonales. Toutefois, en géotechnique, on suppose généralement que les écoulements sont unidimensionnels ou bidimensionnels, ce qui couvre la plupart des cas pratiques.

Par ailleurs, nous traitons dans ce chapitre, uniquement, le cas d'écoulements en ***régime permanent***, c'est à dire des écoulements stabilisés pour lesquels la vitesse et la pression de l'eau en tout point du massif sont indépendantes du temps (par opposition, le *régime transitoire* est un régime non stabilisé où la pression et la vitesse de l'eau varient avec le temps).
Un écoulement est donc dit ***permanent*** lorsque la distribution des vitesses d'écoulement (et par conséquent celles des charges hydrauliques) ne varie pas dans le temps. Evidemment, un tel écoulement ne peut être obtenu que lorsque le squelette solide ne subit aucune déformation. Par ailleurs, étant donné les faibles niveaux de contraintes que l'on rencontre dans la plupart des applications, on peut considérer les variations de densité de l'eau comme négligeable et l'écoulement, comparable à celui d'un fluide incompressible.

Dans ce chapitre, l'hydraulique des sols concerne exclusivement :

1. L'eau libre des sols ;
2. Son écoulement en régime permanent ;
3. Et en supposant que le sol est complètement saturé et la relation de Terzaghi : σ = σ' + u est valide ;
4. La gravité est prise en compte.

Par ailleurs, pour étudier l'écoulement de l'eau dans les sols, nous admettrons les hypothèses suivantes :

a) L'eau interstitielle est incompressible ; il en est de même pour les grains solides ;
b) La masse d'eau interstitielle se conserve.

1.3.2 Objet de l'hydraulique des sols

L'hydraulique des sols a pour objet de caractériser les écoulements permanents (indépendants du temps) dans les sols, en tenant compte des conditions aux limites des problèmes analysés :

- la répartition des charges hydrauliques et des pressions interstitielles ;
- les champs des vitesses d'écoulement ;
- les débits.

Elle permet, par exemple, résoudre les problèmes suivants :

- le calcul du débit à pomper pour assécher une fouille ;
- le calcul du débit de fuite d'un barrage dû à l'écoulement d'eau à travers le barrage et dans le sol de fondation ;
- l'étude des effets du pompage sur la forme de la nappe à proximité des alimentations existantes et sur leur débit ;
- l'étude de la répartition des pressions interstitielles dans un talus de déblai.

Des deux aspects suivants : calcul des débits et calcul des pressions interstitielles ; c'est ce dernier (calcul des pressions interstitielles) qui est primordial en mécanique des sols. En effet, la résistance mécanique des sols est directement liée à la contrainte effective et dépend donc de la valeur des pressions interstitielles. C'est dire l'importance de la détermination des réseaux d'écoulements et, par suite, de l'hydraulique des sols.
La mise en place d'un système de drainage a bien souvent pour but de réduire les pressions interstitielles en vue d'améliorer la stabilité d'un ouvrage. Il est nécessaire, pour dimensionner ce dernier correctement, de connaître les débits, mais on jugera de son efficacité par la baisse des pressions interstitielles obtenue. Ce point mérite d'autant plus d'être souligné que les pressions sont en principe indépendantes des débits. Dans les argiles de très faible perméabilité, les débits sont insignifiants (vitesse d'écoulement de l'ordre de quelques centimètres par an), si bien qu'on peut ne pas déceler de surface de suintement sur le parement d'un talus (débit inférieur, par exemple, aux effets de l'évaporation), alors que des pressions interstitielles existent dans le massif.

1.3.3 Propriété de l'eau libre (écoulement unidimensionnel)

1.3.3.1 Vitesse d'écoulement (de percolation ou d'infiltration)

Nous admettrons pour simplifier que la surface S de la figure 1.10 est normale aux lignes de courant (la *ligne de courant est définie dans le paragraphe 1.5.2.1, Figure 1.11*) :

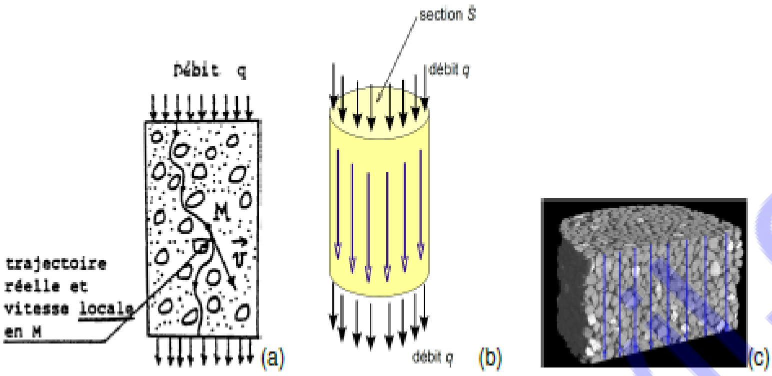


Figure 1.10 *: (a) Illustration de la vitesse réelle de l'eau s'écoulant à travers un sol ; (b et c) hypothèse d'un milieu homogène où les filets d'eau sont rectilignes pour la définition de la vitesse d'écoulement.*

Appelons ***q*** le débit de l'écoulement à travers la surface S, c'est à dire le volume V_w (m^3) de l'eau qui traverse cette surface par unité de temps t (seconde) :

$$q = \frac{V_w}{t} (m^3 / s)$$

On appelle «vitesse d'écoulement» v à travers la surface S le rapport du débit ***q*** à l'aire S :

$$v = \frac{q}{S} (m / s)$$

Cette vitesse est dirigée selon la normale à la surface S.

La vitesse d'écoulement ainsi définie est le rapport de la quantité d'eau qui traverse réellement la surface S à une surface qu'elle ne peut pas traverser partout, puisque S comporte une partie de particules et une partie de pores (*les pores sont les vides entre les grains*): il s'agit donc d'une *vitesse moyenne apparente* de l'eau.

La définition de la *vitesse moyenne vraie* de l'eau dans le sol nécessite de connaître l'aire des vides S_v dans la surface S considérée. On peut admettre que le rapport entre S_v et S est égal à celui du volume des vides V_v au volume total V, qui n'est autre que la porosité *n* ($n = \frac{V_v}{V}$) du sol : $\frac{S_v}{S} = n$. On en déduit que la *vitesse moyenne vraie* v' de l'eau dans le sol est liée à la *vitesse moyenne apparente* v par la relation : $v' = \frac{q}{n.S} = \frac{v}{n}$ (m/s).

1.3.3.2 Lignes et tube de courant

Si l'on imagine l'écoulement moyen de l'eau à l'intérieur d'un massif de sol, on peut suivre le déplacement, au cours du temps, de l'eau contenue initialement dans un volume élémentaire. La trajectoire de cette eau est appelée «ligne de courant». Une ligne de courant a la propriété de ne pouvoir être traversée par l'eau, puisque c'est sa propre trajectoire (Figure 1.11, à gauche). C'est une courbe tangente en chaque point au vecteur vitesse $\vec{v}$ d'écoulement (Figure 1.10.a). Si cette courbe est rectiligne, l'écoulement est dit linéaire. Par chaque point d'un massif de sol homogène ne passe qu'une seule ligne de courant.

Considérons une surface S plane (Figure 1.11) traversée à un instant t donné par une certaine quantité d'eau.
On appelle «tube de courant» la trajectoire de l'eau qui passe sur la frontière de cette surface. Un tube de courant est donc l'enveloppe des trajectoires de l'eau qui traverse la surface S (Figure 1.11, à droite). Toute l'eau qui entre dans un tube de courant ressort à l'autre extrémité du même tube, puisqu'aucune des lignes de courant formant le tube ne peut être traversée. Donc, les lignes de courant qui partent des points d'une courbe fermée de l'espace délimitent un volume appelé «tube de courant», qui constitue une sorte de tuyau virtuel (Figure 1.11, à droite).

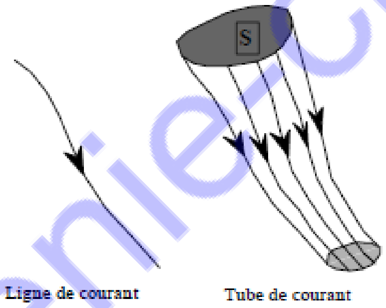


Figure 1.11 *: Lignes et tube de courant.*

1.3.4 Rappelle de le mécanique des fluides (Théorie de Bernoulli)

Avant d'aborder les propriétés de l'eau libre, notamment la notion de la *charge hydraulique*, nous intéressons d'abord à la théorie de *Bernoulli* :

Le théorème qui a été établi en 1739 par Daniel Bernoulli décrit le comportement simplifié **d'un fluide parfait** dans une conduite ou, en généralisant, dans un tube de courant au sein d'une masse d'eau. Il traduit simplement la conservation de l'énergie mécanique E (sans conversion en énergie interne, ni variation de volume, ni frottement) dans un volume *V* de fluide de masse *m* et masse volumique ρ par : $E = E_C + E_P + E_Z =$ **Constante**.
L'équation de Bernoulli fait apparaître trois formes d'énergie :

$E_C = \frac{1}{2}.\rho.v^2$: énergie cinétique par unité de volume;

E_Z : ρ.g.z : énergie potentielle (pesanteur) par unité de volume ;

$E_P = P$: énergie de pression par unité de volume.

En considérant un fluide incompressible avec une viscosité négligeable, en régime permanent, et sans transfert de chaleur, l'équation de Bernoulli peut s'écrire sous *trois formes*, comme suit :

1. En pression (énergie par unité de volume) : $\frac{1}{2}\rho.v^2 + \rho.g..z + P$;
2. En charge (énergie par unité de masse) : $\frac{1}{2}.v^2 + g.z + \frac{P}{\rho}$;
3. En hauteur (énergie par unité de poids) : $\frac{1}{2.g}.v^2 + z + \frac{P}{\rho.g}$.

Avec :

v : vitesse du fluide ;
g : accélération gravitationnelle (pesanteur) ;
p : pression du fluide ;
ρ : masse volumique du fluide,
z : altitude du point considéré par rapport à un plan de référence.

Il est cependant plus courant d'exprimer l'équation de Bernoulli en terme d'énergie par unité de poids , c'est-à-dire en hauteur d'eau (Forme 3) :

$$h(m) = \frac{1}{2.g}.v^2 + z + \frac{P}{\rho.g}$$

1.3.5 Charge hydraulique

En hydraulique des sols *la charge hydraulique* **correspond** à l'énergie totale d'une particule d'eau de poids unité, elle s'exprime en mètre (m) d'eau telle que :

$$\boxed{h(m) = \frac{1}{2.g}v^2 + z + \frac{p}{\rho_w.g} = \frac{1}{2.g}v^2 + z + \frac{p}{\gamma_w}}.$$

- ✓ h(m) est la charge totale (hauteur totale) ;
- ✓ $\frac{1}{2.g}v^2$ est la charge de vitesse (hauteur cinétique) ;
- ✓ z est la charge de position (hauteur de position ou altitude) ;
- ✓ $\frac{p}{\rho_w.g}$ est la charge de pression (hauteur de pression) ;
- ✓ $z + \frac{p}{\rho_w.g}$ est la charge piézométrique (hauteur piézométrique).

Avec :

v : vitesse de l'eau ;
g : accélération gravitationnelle (pesanteur) ;
p : pression de l'eau en ou pression interstitielle ;
ρ_w : masse volumique de l'eau,
γ_w : poids volumique de l'eau ;
z : altitude du point considéré par rapport à un plan de référence (voir figure 1.12).

- *la charge de press*ion représente l'énergie produite par la pression de l'eau en un point donné. Elle est engendrée par la quantité d'eau située au dessus au dessous du point considéré. On la mesure en hauteur d'eau à l'aide d'un **tube piézométrique.** La charge de pression correspond donc à la distance entre le niveau stationnaire de l'eau dans le tube et le point considéré. Elle peut être positive si le niveau d'eau le piézomètre s'élève du point considéré, ou négative dans le cas contraire.

- *la charge de position*, elle est associée à l'énergie potentielle. Elle représente la distance qui sépare le point considéré d'une surface de référence arbitraire. Elle peut être négative ou positive selon que le point considéré se situe au dessus ou au dessous de la surface de référence. Toute surface qui facilite le calcul de la charge de position peut servir comme surface de référence, mais on choisit souvent le niveau d'eau de la sortie aval ou une surface imperméable.

- *la charge de vitesse* correspond à l'énergie cinétique accumulée par l'eau en un point donné. En hydraulique des sols (milieu poreux), on ne tient pas compte de cette forme d'énergie, car l'écoulement de l'eau est très lent et produit des charges de vitesse très faible et l'énergie cinétique $\frac{1}{2.g}v^2$ est tout à fait négligeable.

Par conséquent, la charge totale devient :

$$\boxed{h(m) = \frac{p}{\rho_w.g} + z = \frac{p}{\gamma_w} + z}.$$

D'autre part, en désignant par *«u»* la pression de l'eau dans les pores du sol, la définition de la charge hydraulique au sens de la mécanique des sols est donc la suivante :

$$\boxed{h(m) = \frac{u}{\gamma_w} + z}$$

qu'on peut écrire comme suit :

$$\boxed{h(m) = h_w + z}.$$

Avec :

h est la charge totale ;

$h_w = \frac{u}{\gamma_w}$ est la charge de pression ;

z est la charge de position.

La charge hydraulique a pour dimension [L] et s'exprime en mètres : h(m).

Un exemple d'écoulement unidimensionnel est montré dans la figure 1.11.a ci dessous:

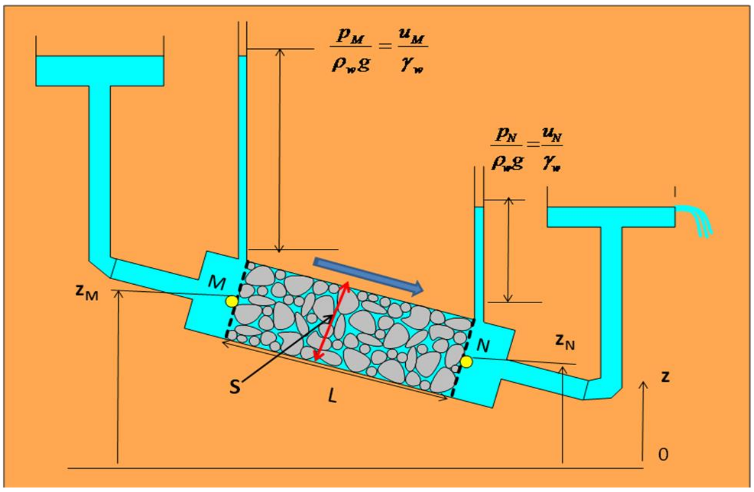


***Figure 1.11.a** : Écoulement linéaire (unidimensionnelle).*

Remarque :

D'après le théorème de Bernoulli si $\mathbf{h_M = h_N}$ **= constante**, il n'y a pas d'écoulement entre M et N. Par contre, si $\mathbf{h_M > h_N}$, il y a écoulement de M vers N et la perte de charge $h_M - h_N$ correspond à l'énergie perdue en frottement (eau – sol). Cette perte de charge est à la fois le **moteur et la conséquence de l'écoulement** (Figure 1.11.a).

1.3.5.1 Perte de charge hydraulique

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait (incompressible et non visqueux) le théorème de Bernoulli indique que la charge le long d'un filet de fluide **reste constante**. L'eau n'étant pas un fluide parfait, la présence des particules solides génèrent des contraintes de cisaillement (liées au gradient de vitesse). Il y a interaction de l'eau avec les grains du sol, en conséquence dissipation d'énergie. C'est-à-dire que la charge n'est pas constante, lors de l'écoulement. La charge hydraulique est une valeur relative en fonction de la position du plan de référence, elle est donc définie à une constante près. Cela ne pose pas de problème car c'est la variation de charge entre deux points qui est le paramètre fondamental (Figure 1.12).
La variation de charge subie par l'eau dans son mouvement de M à N (dans le sens de l'écoulement) est égale à (h_M-h_N). Cette variation est négative. On appelle perte de charge la quantité **-(dh) =** $\mathbf{h_M - h_N}$.

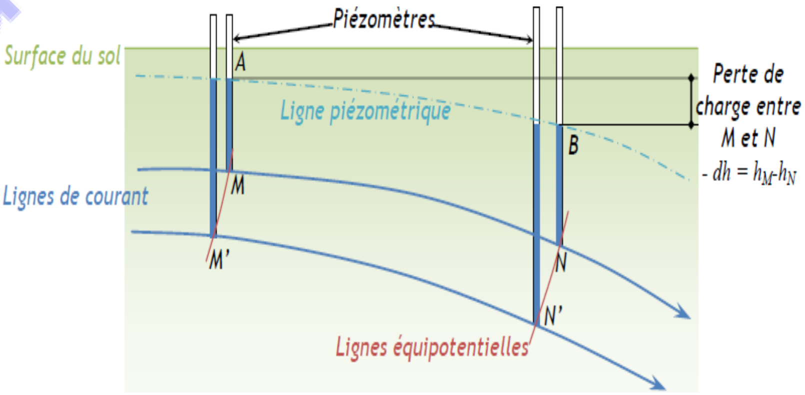


***Figure 1.12**: Détermination de la perte de charge.*

Soit M le point considéré et A le niveau supérieur de l'eau dans le tube. La charge hydraulique est la même en A et en M puisque il n'y a pas d'écoulement entre les deux points. De même pour le point N ; la charge hydraulique en ce point est identique à celle en point B.

Si la charge au niveau du point M est égale à la charge au niveau du point N ($h_M = h_N$) il n'aura pas d'écoulement. Il y a écoulement de M vers N, si et seulement si $h_M > h_N$.
La pression interstitielle « u » est mesurée par la hauteur d'eau dans **un tube piézométrique** appelé aussi piézomètre pénétrant dans le sol jusqu'au point considéré. Quand la charge hydraulique totale varie d'un point à un autre, on peut conclure qu'il y a donc une perte d'énergie ou une perte de charge causée par la friction (frottement) de l'eau s'écoulant à travers le sol. La variation de charge subie par l'eau dans son mouvement de M à N (dans le sens de l'écoulement) est égale à (h_N-h_M). Cette variation est (-dh) = h_M-h_N, elle représente une dissipation d'énergie lors de l'écoulement de M vers N. La figure 1.12 ci-dessus montre la perte de charge correspondant à la différence entre charges hydrauliques totales :
La perte de charge $h_M - h_N = \Delta h_{M\to N}$ correspond à l'énergie perdue en fortement eau-sol. cette perte de charge est le «moteur» de l'écoulement. La différence de charge $h_M - h_N = \Delta h_{M\to N}$ > o ($h_M > h_N$), c'est-à-dire que l'écoulement se fait donc de M vers N :

$$h_M = z_M + \frac{u_M}{\gamma_w} \quad ; \qquad h_N = z_N + \frac{u_N}{\gamma_w}$$

$$\boxed{h_M - h_N = \Delta h_{M\to N} = z_M + \frac{u_M}{\gamma_W} - z_N - \frac{u_N}{\gamma_w} = (z_M - z_N) + (\frac{u_M - u_N}{\gamma_w})}.$$

1.3.5.2 Équipotentielles

On appellera ligne équipotentielle (surface équipotentielle) une ligne (surface) sur laquelle la charge hydraulique totale est constante.
Les lignes d'égale valeur de la charge hydraulique totale sont donc appelées lignes équipotentielles (Figures 1.12 et 1.13).

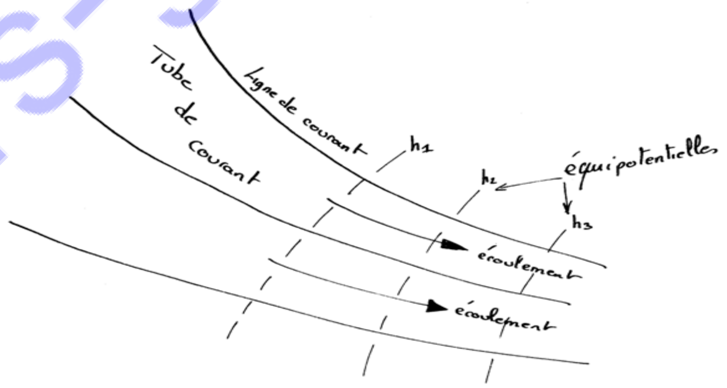


Figure 1.13 : *Lignes équipotentielles.*

1.3.5.3 Gradient hydraulique

La dernière notion nécessaire à la description des mouvements de l'eau dans le sol est le gradient hydraulique « i », qui est par définition l'opposé du gradient de la charge hydraulique h : le gradient hydraulique en un point M (x, y, z) (Figure 1.14) est une grandeur vectorielle qui est l'opposé du gradient de la charge hydraulique h tel que $\vec{i} = -\overrightarrow{grad}h$. On peut le décomposer en trois composantes :

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = -\overrightarrow{grad}h$$

-Propriétés :

a) En un point P très voisin du point M (Figure 1.14), tel que $\overrightarrow{MP}\begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$

On a : $h_M - h_P = -dh_{MP} = \vec{i}.\overrightarrow{MP}$

$\Rightarrow -dh_{MP} = \vec{i}.\overrightarrow{MP} = -\dfrac{\partial h}{\partial x}.dx - \dfrac{\partial h}{\partial y}dy - \dfrac{\partial h}{\partial z}dz$

.

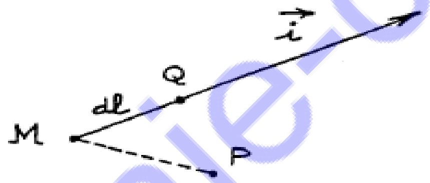


***Figure 1.14 :** gradient hydraulique.*

b) En un point Q très voisin de M et dans la direction de $\vec{i}$, ona : $\left|\overrightarrow{MQ}\right| = dl$

$$h_M - h_Q = -dh_{MQ} = \vec{i}.\overrightarrow{MQ} = \left|\vec{i}\right|.\left|\overrightarrow{MQ}\right|$$

Donc, dans le sens de l'écoulement $-dh = i.dl$ d'où l'expression du module du vecteur $\vec{i}$:

$$\boxed{\left|\vec{i}\right| = i = \frac{-dh}{dl}}.$$

Le gradient hydraulique, dérivée d'une longueur par rapport à une autre longueur, est un paramètre, sans dimension et positif dans le sens du courant. Il se définit aussi **comme la perte de charge par unité de longueur d'écoulement.**

Il n'y a pas d'écoulement suivant une surface équipotentielle ; le vecteur de gradient hydraulique $\vec{i}$ en un point est normal à la surface équipotentielle qui passe par ce point (Figure 1.15).

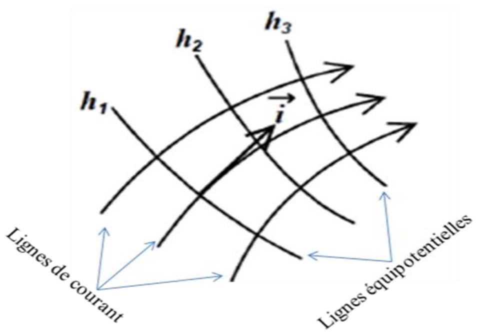


***Figure 1.15** : Équipotentielle et vecteur gradient hydraulique.*

Pour un écoulement unidimensionnel (linéaire) montré dans la figure 1.16, le gradient hydraulique $i = \frac{\Delta h}{\Delta L}$; avec Δh la perte de charge entre les points M et N ; ΔL la distance parcourue par l'eau dans le sol de M à N.

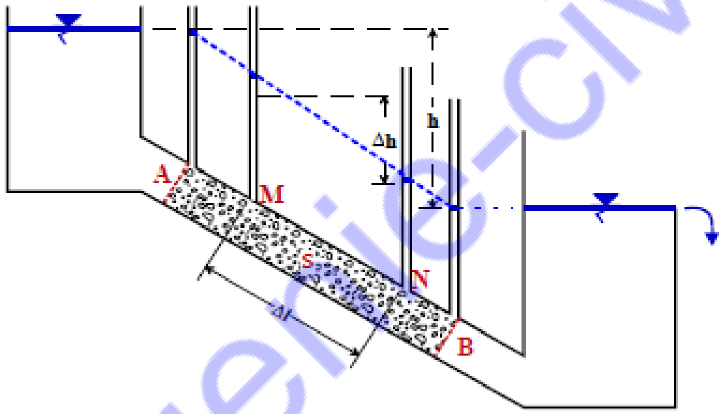


***Figure 1.16 : Écoulement** unidimensionnel.*

Les lignes de courant d'un tel écoulement sont parallèles à l'axe du tube (AB) (Figure 1.16). Elles sont perpendiculaires aux lignes équipotentielles, comme montrées sur la figure 1.17.

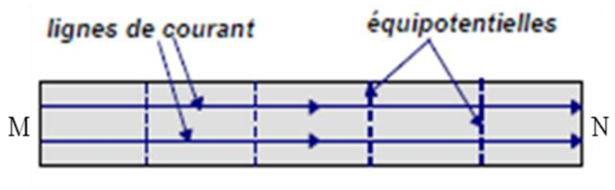


***Figure 1.17 :** Lignes de courant et équipotentielles dans un écoulement unidimensionnel.*

1.3.5.4 Exemple de calcul du gradient hydraulique

Le gradient hydraulique dans le sol (Figure 1.17.a : entre B et D) est :

$$i = \frac{\Delta h}{L}$$

Δh : est la perte de charge ;
L : est la longueur traversée par l'eau.

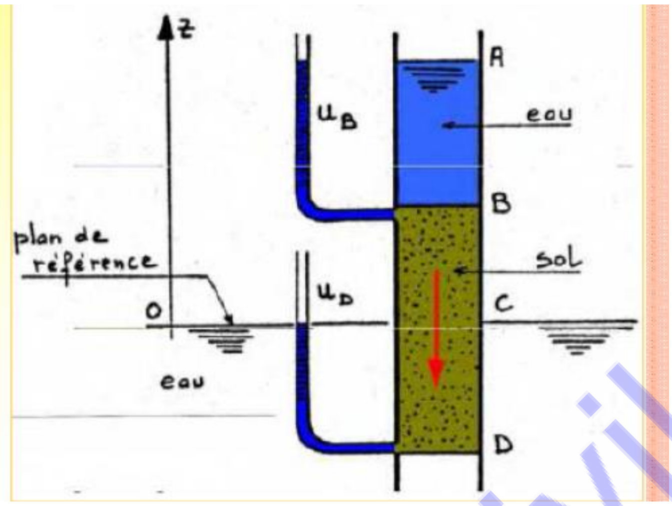


Figure 1.17.a : *Exemple de calcul du gradient hydraulique i.*

Charge au point B :

$$h_B = BC + AB = AC$$

Charge au point D :

$$h_D = -CD + CD = 0$$

Perte de charge :

$$\Delta h_D = h_B - h_D = AC - 0 = AC$$

Gradient hydraulique :

$$i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{AC}{BD}$$

1.3.6 Loi de Darcy

La loi expérimentale de Darcy (1856) décrit le mouvement du fluide à l'intérieur des pores du sol. Établie pour un écoulement d'eau dans un sable propre saturé (Figure 1.18), elle a été généralisée aux écoulements dans les autres types de sols saturés et sert aussi pour les écoulements d'autres fluides (pétrole, gaz, air, ...) seuls ou en mélangés. C'est donc une des lois les plus importantes de l'hydraulique dans les milieux poreux.

La figure 1.18.a décrit le dispositif expérimental utilisé pour ces expériences : un tube de 35 cm de diamètre et 2,5 m de hauteur, rempli de sable propre sur une hauteur L, avec une différence de hauteur d'eau imposée entre les parties hautes et basses du tube. Sous chaque différence de charge Δh, le débit Q était mesuré pendant 20 minutes.

Quatre séries d'essais ont été réalisées en octobre 1855, pour L = 0,58 m ; 1,10 m ; 1,14 m et 1,70 m, avec différents débits imposés. En février 1856, douze autres séries d'essais ont été réalisées sur le même sable, mais avec des valeurs imposées de la pression en haut et en bas de la colonne de sable.

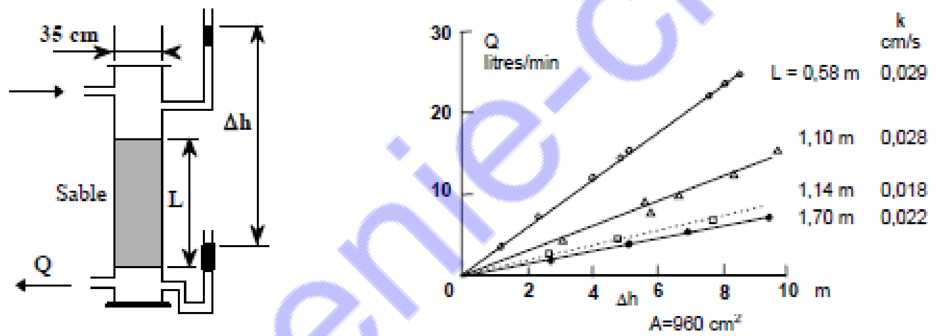
Ces résultats (Figure 1.18.b) montrent que, dans les limites de la précision des expériences, la vitesse « v » de l'écoulement est proportionnelle au gradient hydraulique « i »:

$$\boxed{\frac{Q}{A} = v = k\frac{\Delta h}{L}}$$

A: est la section du tube ;
k : est coefficient ou constante du sable, appelée *coefficient de perméabilité*.

On voit bien que la loi expérimentale de Darcy, établie pour un écoulement unidirectionnel (Figure 1.18), peut être définit par l'équation suivante :

$\boxed{v = k.i}$ et $i = \dfrac{\Delta h}{L}$ est le gradient hydraulique.



a. Dispositif expérimental b. Résultats des essais

Figure 1.18 *: Essais de Darcy sur la perméabilité du sable.*

Lorsque dans un écoulement le gradient hydraulique est le même en tout point, l'écoulement est dit uniforme.
Par ailleurs, Darcy a aussi examiné le cas où le niveau de l'eau au-dessus du sable peut s'abaisser au cours du temps, au fur et à mesure de l'écoulement. Il a établi que la loi a la forme :

$$\boxed{\lg\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right) = k.\frac{t_2 - t_2}{L}}$$

Avec :

Δh_1 et Δh_2 : différences de hauteur d'eau aux temps t_1 et t_2, respectivement ;
k : coefficient de perméabilité ;
L : longueur parcourue par l'eau dans le sol.

Cette formule est celle qui sert à interpréter les essais de perméabilité au perméamètre à charge variable (*voir paragraphe 1.3.9.1 ; b*).

1.3.7 Généralisation de la loi de Darcy

La loi de Darcy telle qu'elle a été formulée au départ est une relation empirique entre le module du gradient hydraulique et le module de la vitesse d'infiltration. La direction de l'écoulement ne jouait aucun rôle puisqu'elle était unique et pour cause puisque la loi de Darcy est définie sur un écoulement à une seule dimension. En pratique, les écoulements à deux ou trois dimensions sont plus prépondérants et la généralisation de la loi de Darcy s'impose.

1.3.7.1 Généralisation de la loi de Darcy pour un milieu homogène et isotrope

La loi de Darcy est la loi fondamentale de l'hydraulique des sols. Elle relie le vecteur vitesse au vecteur gradient hydraulique. Nous rappelons qu'elle a été établie, expérimentalement, aux sols par Darcy (1856) pour un écoulement unidimensionnel dans un milieu homogène et isotrope.
Pour ces milieux (homogène et isotrope) elle s'exprime plus généralement, dans un écoulement tridimensionnel, par la relation :

$$\vec{v} = k.\vec{i} \; ; \; \vec{v} = -k.\overrightarrow{gradh}$$

Avec :
$\vec{v}$: vecteur de vitesse d'écoulement, $\vec{v}$ (x, y, z, t) ;
$\vec{i}$: vecteur de gradient hydraulique, $\vec{i}$ (x, y, z, t) ;
k : coefficient de perméabilité du sol ;
h : charge hydraulique h (x, y, z, t).

$$\vec{i} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = -\overrightarrow{gradh} \text{, alors } \vec{v} = -\begin{pmatrix} k.\frac{\partial h}{\partial x} \\ k.\frac{\partial h}{\partial y} \\ k.\frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ ; alors } \vec{v} = -k.\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = -\begin{pmatrix} v_x = k.\frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = k.\frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = k.\frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La loi de Darcy, dans le cas tridimensionnel isotrope, exprime que le vecteur vitesse de décharge (vitesse d'écoulement) et le gradient hydraulique ***sont colinéaires.*** (Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires), k est un scalaire. Donc pour les milieux isotropes, *les lignes de courant sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.*

1.3.7.2 Généralisation de la loi de Darcy pour milieu homogène et anisotrope

Les équations et les résultats écrits précédemment l'ont été pour des sols homogènes et isotropes. Ce qui n'est pas le cas de tous les sols où souvent la perméabilité verticale est supérieure à la perméabilité horizontale. On admettra en pratique que les sols sont homogènes mais anisotropes ; ceci s'explique un peu par le processus de leur formation.
Donc, la loi expérimentale de Darcy, établie dans des cylindres de section constante pour un écoulement unidirectionnel, peut être généralisée aux trois directions de l'espace, en définissant un tenseur de perméabilité $\bar{\bar{k}}$ qui lie le vecteur vitesse d'écoulement au vecteur gradient hydraulique : $\vec{v} = \bar{\bar{k}}.\vec{i}$

On rappelle que $\vec{i} = -\overrightarrow{grad}h$, c'est-à-dire que $\vec{i} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = -\overrightarrow{grad}h$

Alors $\vec{v} = -\bar{\bar{k}}.\overrightarrow{grad}h$

Lorsque l'orientation des axes est quelconque, le tenseur de perméabilité est un tenseur symétrique à six coefficients indépendants :

$$\bar{\bar{k}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

Comme tout tenseur symétrique, le tenseur de perméabilité $\bar{\bar{k}}$ admet trois directions principales orthogonales et peut être écrit sous forme diagonale dans ce nouveau système d'axes :

$$\bar{\bar{k}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \text{ et donc } \vec{v} = -\begin{pmatrix} k_{xx}.\frac{\partial h}{\partial x} \\ k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y} \\ k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \; ; \; \vec{v} = -\begin{pmatrix} v_x = k_{xx}.\frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = k_{yy}.\frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = k_{zz}.\frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans les sols sédimentaires, les trois directions principales sont habituellement la direction verticale et deux directions horizontales perpendiculaires (la perméabilité est souvent isotrope dans un plan horizontal). Autrement dit, dans la plupart des sols naturels, ces trois directions principales avec une anisotropie du milieu sont deux axes des plans de stratification naturelle des sols et l'axe perpendiculaire. Dans beaucoup de cas, ces axes seront deux axes horizontaux où l'on aura souvent (k_{xx}= k_{yy}) et l'axe vertical. Au fait, si l'on considère un sol, quelque soit le sens de l'écoulement, il sera anisotrope et caractérisé par ***deux coefficients horizontal k_h et vertical k_v***. Pour un tel sol la loi de Darcy s'écrit :

$$\vec{v}=\begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & k_v \end{bmatrix}.\vec{i} \quad \text{alors} \quad \vec{v}=-\begin{pmatrix} v_x = k_h.\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = k_h.\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = k_v.\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On constate que les vecteurs « gradient hydraulique » et « vitesse » ne sont pas colinéaires. Ils se déduisent l'un de l'autre par un opérateur linéaire qui est le tenseur de pérméabilté $\overline{\overline{k}}$ symétrique et diagolisable à six coefficients indépendants. Ainsi, les lignes de courants dans un milieu anisotrope ne sont pas perpendiculaires aux lignes (surface) équipotententielles.

Par ailleurs, comme nous l'avaons vu précedemment, certains sols sont isotropes, auquel cas le tenseur de perméabilité se réduit à un seul coefficeint de perméabilité isotrope k, tel que k = k_h= k_v. On a donc :

$$\vec{v}=\overline{\overline{k}}.\vec{i} \; ; \text{avec} \; \overline{\overline{k}}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}=k.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}=k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\vec{i} \; ; \text{alors} \; \vec{v}=-k.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_x = k.\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = k.\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = k.\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.3.7.3 Limite de la loi de Darcy

La loi de Darcy est applicable dans un régime laminaire, c'est-à-dire tant que la valeur de nombre de Reynolds $\Re$ est inférieure à 10 (Figure 1.18). Entre 10 et 100, on observe un régime de transition où les forces d'inertie prennent une importance de plus en plus grande. Au-delà de 100, le régime d'écoulement est turbulent.

La valeur limite du gradient hydraulique au-delà de laquelle la loi linéaire de Darcy n'est plus utilisable dépend des propriétés du milieu poreux considéré. Après de nombreuses études expérimentales, on a défini, par analogie avec l'hydraulique, un nombre de Reynolds $\Re$ en milieu poreux :

$$\Re=\frac{v.d.\rho_w}{\mu}$$

Avec :

d : diamètre moyen des particules ;
ρ_w : masse volumique de l'eau ;
μ : viscosité dynamique de l'eau.
v : vitesse d'écoulement.

En pratique, sauf dans les milieux très perméables et à proximité des ouvrages de captage, la valeur critique du nombre de Reynolds $\Re$ en milieu poreux n'est jamais atteinte et l'on reste toujours dans un régime d'écoulement laminaire où le gradient hydraulique augmente linéairement avec la vitesse.
Néanmoins, pour les gradients hydrauliques élevés, on observe expérimentalement qu'il n'y a plus de proportionnalité entre le gradient hydraulique «i» et la vitesse d'écoulement «v» (Figure 1.19). Cette divergence provient du passage de l'écoulement de l'eau d'un régime laminaire à un régime turbulent, et elle est associée aux pertes d'énergie d'origine visqueuses et à la dissipation d'énergie cinétique (forces d'inertie).

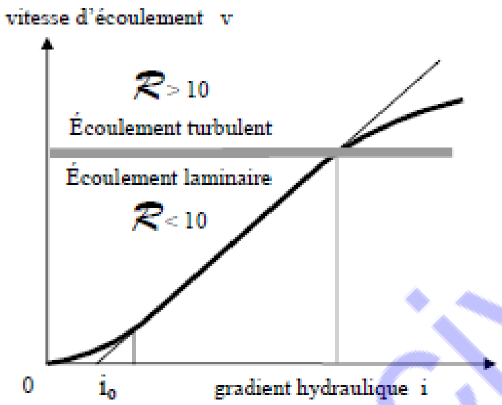


***Figure 1. 19**: Zones d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent.*

L'équation de Darcy s'applique particulièrement aux écoulements *laminaires* : (On considère que l'écoulement est *laminaire* lorsque la vitesse de l'eau est lente et que les gouttes d'eau se déplacent en ligne droite, regroupées en lamelles qui ne se mélangent pas. Dans les sols, on considère que l'écoulement est laminaire lorsque la vitesse de l'eau est inférieure à 1cm/s). Les vitesses supérieures signalent des écoulements *turbulents* (variations aléatoires engendrant un certain mélange et une dissipation d'énergie interne). Les écoulements d'eau à travers les dépôts de sol étant surtout laminaires et permanents. L'équation de Darcy s'applique à la plupart des sols ; mentionnons, toutefois, que les écoulements d'eau à travers les sols composés de gravier, de cailloux ou de blocs et comportant de gros vides peuvent être turbulents : l'équation de Darcy pourra alors être une source d'erreur.

1.3.8 Coefficient de perméabilité

Le coefficient k de la loi de Darcy, appelé « coefficient de perméabilité », a la dimension d'une vitesse car le gradient hydraulique « i » est sans dimension (rapport de deux longueurs) et la vitesse d'écoulement de l'eau a elle-même la dimension d'une vitesse. Il s'exprime en général en m/s, il est appelé aussi « conductivité hydraulique » et varie largement avec la nature et l'état du sol.

Le coefficient de perméabilité k, qui décrit la vitesse d'écoulement moyenne de l'eau à travers les pores du sol, dépend de trois facteurs principaux, qui sont :

- le volume et la géométrie de l'espace dans lequel l'eau circule ;
- les propriétés de l'eau (notamment sa viscosité, qui dépend elle-même de la température) ;
- les conditions de contact de l'eau avec les particules, déterminées par la nature des particules et leurs interactions plus ou moins grandes avec l'eau.

Il est impossible d'analyser séparément l'influence de ces trois facteurs car la géométrie des pores dépend de la nature des particules et est donc liée aux conditions de contact de ces particules avec l'eau, tandis que la viscosité de l'eau a aussi une influence sur les conditions d'interaction entre l'eau et les particules. Cette difficulté a conduit à caractériser d'abord l'influence de la viscosité de l'eau, puis à relier la perméabilité aux particules et aux pores du sol en distinguant les sols grenus et les sols fins argileux.

L'influence de la viscosité de l'eau est celle que l'on met le plus facilement en évidence, puisqu'il suffit de chauffer l'eau pour modifier sa viscosité. Le coefficient de perméabilité k est inversement proportionnel à la viscosité du liquide interstitiel. En séparant l'influence de la viscosité et des autres facteurs liés à la géométrie des pores et aux interactions avec les particules, on peut l'écrire sous la forme : $k = \frac{\gamma_w . K}{\mu}$; avec :

μ : La viscosité dynamique, égale au produit de la viscosité cinématique ν par la masse volumique du fluide qui se déplace dans le sol, vaut $\mu \cong 10^{-6}$ kN.s/m^2 pour l'eau pure à 20°C. Le coefficient de perméabilité (à l'eau) augmente d'environ 20% quand la température du sol (et de l'eau) passe de 10°C à 20°C ;

K **:** coefficient caractérisant l'empilement des particules du sol (ou le réseau des vides), appelé « perméabilité » ou « perméabilité géométrique » ou « perméabilité intrinsèque » et ayant la dimension d'une surface ;

γ_w : poids volumique de l'eau.

Bien que l'on puisse exprimer la perméabilité intrinsèque en mètres carrés, la perméabilité intrinsèque est souvent exprimée en « darce » (10^{-12} m^2) ou en « darcy » ($0,987.10^{-12}$ m^2).

1.3.9 Mesure du coefficient de perméabilité

La mesure du coefficient de perméabilité des sols s'effectue en laboratoire, sur des échantillons de sol de petit volume (quelques centaines de centimètres cubes), ou sur le terrain dans des forages. Les essais de laboratoire sont habituellement effectués sur des éprouvettes de sol homogène, taillées dans les carottes prélevées sur le terrain. Les essais de terrain, qui peuvent tenir compte des hétérogénéités du massif de sol (présence de strates de matériaux plus ou moins perméables, de fissures, de failles, ...) donnent souvent une image différente, à plus grande échelle et plus représentative, de la perméabilité réelle du massif de sol. Les coefficients de perméabilité varient de façon très large avec la nature du sol. Le tableau 1.1 donne les ordres de grandeur des perméabilités courantes des grands groupes de sols homogènes.

Tableau 1.1 : *Ordre de grandeurs du coefficient de perméabilité de sols homogènes.*

Type de sol	Graviers	Sables	Limons (silts)	Argiles
k (m/s)	10^{0} 10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-11}
Méthode de mesure en laboratoire	Perméamètre à charge constante		Perméamètre à charge variable	

1.3.9.1 Mesure de la perméabilité en laboratoire

La mesure directe de la perméabilité des sols en laboratoire s'effectue selon deux procédures (Figure 1.20), *dites à charge constante* (Figure 1.20.a) et *à charge variable* (Figure 1.20.b).

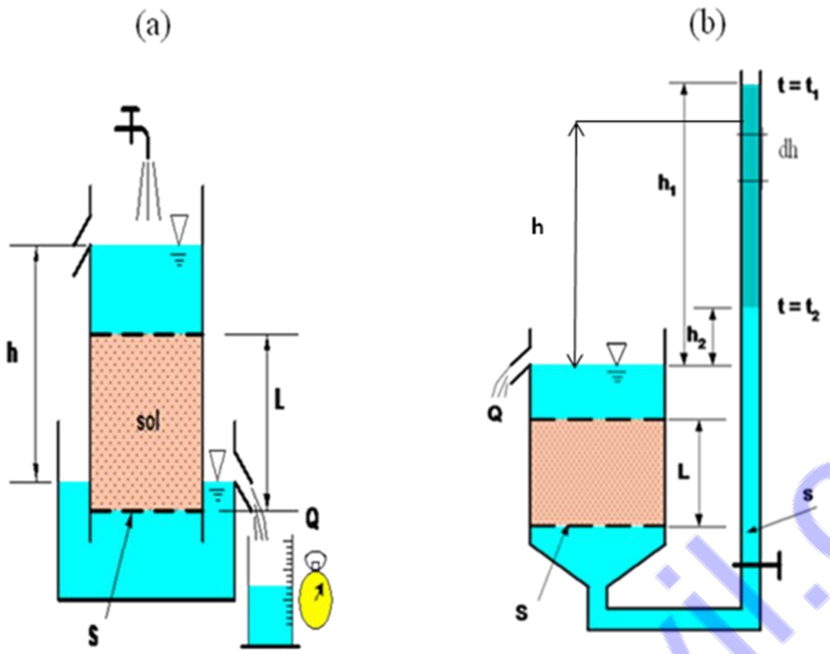


Figure 1.20 : Essai de perméabilité - (a) à charge constante ;(b) à charge variable.

a) *Essai à charge constante*

Les essais à charge constante entretiennent *une différence de charge h constante* entre les deux extrémités d'une éprouvette de sol d'épaisseur L et de section S et l'on mesure la quantité d'eau $V_w(t)$ qui traverse l'éprouvette au cours du temps (Figure 1.20.a). Le coefficient de perméabilité est égal à :

$\boxed{k = \frac{v}{i}}$; $\boxed{k = \frac{q}{S} \cdot \frac{L}{h}}$. donc $\boxed{k = \frac{V_w(t_2) - V_w(t_1)}{(t_2 - t_1).S} \cdot \frac{L}{h}}$

Où $V_w(t_1)$ et $V_w(t_2)$ sont respectivement les quantités d'eau qui ont traversé l'éprouvette aux temps t_1 et temps t_2.

b) *Essai à charge variable :*

Dans les essais à charge variable (Figure 1.20.b), on observe l'écoulement à travers l'éprouvette de l'eau contenue dans un long tube de faible section « s ». À mesure que l'eau traverse l'éprouvette, la différence de charge entre les deux extrémités diminue et la vitesse d'écoulement diminue également, jusqu'à tendre vers un état d'équilibre. La loi de Darcy peut s'écrire à chaque instant en fonction de la différence de charge entre les deux extrémités de l'éprouvette :

$V_w = - s.dh$; V_w est le volume d'eau qui s'écoule dans le tube de **séction s**, pour une hauteur pour une **hauteur dh**, pendant un temps dt : (le signe (-) indique la baisse de niveau de l'eau).

Le même volume V_w s'écoule dans le sol. En appliquant la loi de Darcy sur ce sol on peur écrire que : $V_w = S.(v.dt)$. Et donc :

(- s.dh) = (S.v.dt) = S. $\frac{k.h}{L}\cdot$ dt ; donc $-\frac{dh}{h}=\frac{S.k}{s.L}.dt$; la vitesse d'écoulement est $v=k.i=\frac{k.h}{L}$. Ce qui donne $\int_{h_1}^{h_2}-\frac{dh}{h}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{S.k}{s.L}dt$, donc $\left[-\ln h\right]_{h_1}^{h_2}=\left[\frac{S.K}{s.L}dt\right]_{t_1}^{t_2}$, on aura ainsi : $\ln\frac{h_1}{h_2}=\frac{S.k}{s.L}(t_2-t_1)$; et donc $\boxed{k=\frac{\ln\frac{h_1}{h_2}}{S.(t_2-t_1)}.s.L}$

1. Formule proposée par Hazen (1911) :

$$k=C.d_{10}{}^{2}$$

Cette formule, dans laquelle d$_{10}$ est exprimé en millimètres et k en m/s, est applicable dans le cas des sables propres de dimension efficace d$_{10}$ comprise entre 0,1 et 3 mm. Le coefficient C varie entre 0,004 et 0,012, avec une moyenne proche de 0,01.

2. Formule de Taylor :

$$k=k_0\left(\frac{e}{e_0}\right)^{0,89}$$

Avec k$_0$ et e$_0$ sont respectivement le coefficient de perméabilité et l'indice des vides à l'état initial.

1.3.9.2 Aspect de l'exécution des essais de perméabilité en laboratoire

Si le principe des essais de perméabilité est simple, de nombreux détails pratiques viennent en compliquer l'exécution :

- le choix entre la procédure à charge constante et la procédure à charge variable se fait d'après l'ordre de grandeur du coefficient de perméabilité : pour k < 10^{-5} m/s (limon, argile), la procédure à charge variable est préférable (Figure 1.20.b), car pour ces sols (limon, argile), il faudrait attendre trop longtemps la percolation de volumes d'eau mesurables dans la procédure d'essai à charge constante. La méthode d'essai à charge constante est donc réservée en pratique *aux matériaux sableux à matrice moyenne à grossière* (Figure 1.20.a) ;
- dans l'essai à charge constante il y a nécessité de mesurer le débit **q** (*sur la figure le débit est noté **Q**) ;*
- dans l'essai à charge variable, on ne mesure pas le débit. Par contre, on mesure le temps pour que le niveau d'eau passe de h$_1$ à h$_2$ (Figure 1.20.b) ;
- les essais de perméabilité peuvent être exécutés dans différents appareils, suivant la dimension des éprouvettes de sol disponibles et selon la destination des essais : les essais sur matériaux compactés se feront directement dans le moule de l'essai Proctor. Les essais sur sols naturels extraits par carottage se feront dans des dispositifs de plus faibles diamètres, soit dans une chambre métallique cylindrique rigide (oedomètre-perméamètre), soit à l'intérieur d'une gaine cylindrique en caoutchouc qui enserre l'éprouvette placée dans une enceinte remplie de liquide sous pression (appareil triaxial) ;
- pour les sols peu perméables, qui sont des sols fins argileux ou organiques, il n'est pas facile d'assurer une saturation totale de l'éprouvette au début de l'essai. Les procédures de

saturation par circulation sous-pression d'eau désaérée sont délicates et longues, mais indispensables si l'on veut obtenir des valeurs fiables du coefficient de perméabilité ;
- du fait de la sensibilité de la viscosité de l'eau aux variations de température, il est souhaitable de réaliser les essais à température constante ;
- les déformations du sol provoquées par les variations des contraintes effectives (variations de la pression de l'eau interstitielle à contrainte totale constante) et les variations du volume des appareils de mesures peuvent perturber l'interprétation des essais, lorsque les débits mesurés sont très faibles.

Le coefficient de perméabilité k, au sens de la loi de Darcy, est également appelé *«conductivité hydraulique»*. Il y a lieu de noter que ce coefficient de *perméabilité k n'est pas une caractéristique intrinsèque du sol.*

1.4 Équation générale d'écoulement

Les mouvements de l'eau dans les sols obéissent d'une part à la loi de conservation de la masse (de l'eau) et d'autre part à la loi de Darcy. La combinaison de ces deux lois, exprimées en coordonnées d'Euler permet d'établir l'équation générale de l'écoulement de l'eau dans le sol, dont l'inconnue est la charge hydraulique « h ».

1.4.1 Loi de conservation de la masse d'eau

Considérons un ***domaine*** fixe quelconque à l'intérieur du sol (Figure 1.20.a) et écrivons que la masse de l'eau comprise à l'instant t dans ce volume reste constante au cours du temps (principe de conservation de la masse). La masse M_w de l'eau s'exprime en fonction de la porosité « n» par :

$$M_w = \int_D n\rho_w dV$$

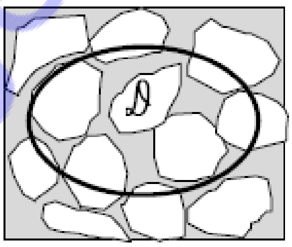


Figure 1.120.a : *Définition du domaine*

.

Quel que soit le domaine, la masse de l'eau doit rester constante, soit :

$$\frac{dM_w}{dt} = 0$$

On en déduit la condition :

$$M_w = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial t}(n\rho_w) + div\left(n\rho_w \vec{v}\right)\right] dV$$

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial t}(n\rho_w) + div\left(n\rho_w \vec{v'}\right) \right] dV = 0$$

La vitesse de l'eau est la vitesse moyenne vraie v', il vient ensuite :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + div(n\vec{v'}) = 0}$$

qui s'écrit finalement, puisque $\vec{v} = n.\vec{v'}$:
:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + div\vec{v} = 0}$$

1.4.1.1 Équation de la charge hydraulique

Deux équations doivent être simultanément vérifiées en tout point du sol :

- l'équation de conservation de la masse de l'eau, que nous venons d'établir : $\frac{\partial n}{\partial t} + div\vec{v} = 0$

- et la loi de Darcy : $\vec{v} = -\overline{\overline{k}}.\overrightarrow{gradh}$

En éliminant la vitesse d'écoulement entre ces deux équations, on obtient l'équation générale : $div\left[\overline{\overline{k}}.\overrightarrow{gradh}\right] = \frac{\partial n}{\partial t}$ qui relie la charge hydraulique « h » à la porosité « n » du sol. Si l'on se place dans les axes principaux du tenseur de perméabilité, dont il a été noté plus haut qu'ils correspondent en général au plan horizontal et à la direction verticale, on obtient l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$div\left[k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right] = \frac{\partial n}{\partial t}$$

et cette équation s'écrit :

$$k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

On rappelle que :

$$\vec{v} = -\begin{pmatrix} v_x = k_{xx}.\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = k_{yy}.\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = k_{zz}.\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Cette équation générale régit tous les types d'écoulements qui peuvent se produire dans les sols : écoulements transitoires, écoulement permanents, écoulements en milieu déformable (consolidation). Elle est analogue aux équations de propagation de la chaleur et de l'électricité

Si, de plus, le coefficient de perméabilité est le même dans toutes les directions (sol isotrope), l'équation prend la forme :

$$k\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial h^2}{\partial y^2}+\frac{\partial h^2}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial n}{\partial t}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\Delta h=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial h^2}{\partial z^2}=\frac{\partial n}{\partial t}}$$

On voit que la distribution des charges ne dépend pas de la *perméabilité* du milieu étudié, dans le cas isotrope.

1.4.1.2 Ecoulement permanent

Les écoulements permanents sont par définition invariables au cours du temps (si le milieu est indéformable, alors la porosité « n » est constante : $\frac{\partial n}{\partial t}=0$), de sorte que l'équation générale précédente se réduit dans ce cas ($div\left[\overline{\overline{k}}.\overrightarrow{grad}h\right]=0$ et avec la même succession d'hypothèses que dans le paragraphe précédent) à l'équation de ***Laplace*** :

$$\boxed{\Delta h=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial h^2}{\partial z^2}=0}$$

On notre que dans un milieu isotrope, k ne figurant pas dans l'équation de ***Laplace***, la répartition des charges hydrauliques ne dépend pas du coefficient de perméabilité du sol, elle ne dépend que de la forme géométrique du domaine d'écoulement et des conditions aux limites.

La charge h est donc, dans ce cas, une fonction harmonique. On peut constater que les valeurs des charges hydrauliques, donc les surpressions interstitielles, ne dépendent pas de la perméabilité du milieu. Ce n'est donc pas parce qu'il n'y a qu'un très faible débit qu'il ne règne pas dans le sol des pressions interstitielles importantes.

.

1.4.1.3 Equation différentielle de Laplace

L'équation différentielle de Laplace s'obtient à partir des hypothèses suivantes :

1) le sol est saturé (S_r = 100%) ;
2) l'eau et les grains solides sont incompressibles.

Les grains solides sont incompressibles : on comprend bien que l'indice des vides e = constante et par conséquent la porosité n = constante. C'est-à-dire que le milieu n'est modifié par aucune consolidation ou compression : le squelette solide ne subissant aucune déformation, le débit qui pénètre dans un élément de sol est égal au débit qui en sort (continuité de l'écoulement).

Soit un volume quelconque de sol saturé (V), limité par une surface (S) et traversé par un écoulement (Figure 1.21). Dans un intervalle de temps donné dt, un volume d'eau dV_1 pénètre à l'intérieure de (S) et un volume d'eau dV_2 en sort. Si on suppose que les grains n'ont pas bougé, c'est à dire si (V) est un domaine fixe de l'espace, et en vertu de l'hypothèse 2, le volume d'eau V_w contenu dans (S) reste le même. Par suite, $dV_1 = dV_2$. Le débit est conservé. C'est la condition de continuité.

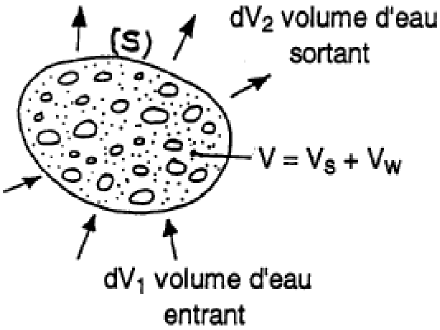


Figure 1.21 : *Volume de sol saturé traversé par un écoulement.*

On considère l'écoulement de l'eau dans un élément mesurant dx sur dy (Figure 1.22). L'écoulement est bidimensionnel.

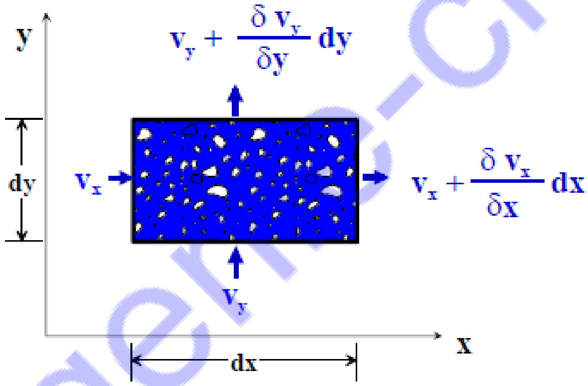


Figure 1.22 *: Ecoulement dans élément dx sur dy.*

Le terme $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ représente le taux de variation de la vitesse v_x dans la direction x ; de même $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ indique le taux de variation de la vitesse v_y dans le sens y. En se rapportant à la loi de conservation de masse on a $v_x.dy + v_y.dx = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right).dy + \left(v_y + \frac{\partial vy}{\partial y} dy\right).dx$, on obtient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dxdy = 0 \text{, d'où } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Selon la loi de Darcy $v = k.i = k.\frac{\Delta h}{\Delta L}$. Pour l'élément dont il est question dans cet exemple, on peut donc écrire : $v_x = k_x.\frac{\partial h}{\partial x}$ et $v_y = k_y.\frac{\partial h}{\partial y}$. On en déduit alors que :

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Dans le cas où k est isotrope ($k_x = k_y$), on aura l'équation bidimensionnelle suivant, appelée équation de Laplace :

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

1.4.2 Etude des réseaux d'écoulement

1.4.2.1 Méthode de résolution des problèmes d'écoulement

La résolution de l'équation de Laplace peut se faire par les méthodes suivantes :

- recherche d'une solution analytique dans les cas unidimensionnels et géométriquement simples (symétrie) ;
- méthode graphique (manuellement par approximations successives) ;
- méthode analogique (analogie entre un courant électrique et un écoulement d'eau).

Toutes ces méthodes ont pratiquement laissé la place à la résolution numérique directe méthode numérique (différences finies et éléments finis) de l'équation de Laplace.

L'écoulement a lieu entre les limites déterminées sur lesquelles sont imposées des conditions sur la vitesse de décharge (vitesse d'écoulement) ou sur la charge hydraulique. Le problème consiste donc à déterminer une fonction h (x, y, z) satisfaisant à l'équation de Laplace et aux conditions aux limités. C'est-à-dire déterminer la distribution de la charge hydraulique h (x, y, z) en tout point du massif du sol par la résolution de l'équation de Laplace (Δh = 0) en exploitant les conditions aux limites de l'écoulement. La pression interstitielle u (x, y, z) s'en déduit en utilisant la relation : $u(x, y, z) = \gamma_w[h(x, y, z) - z]$.

L'étude des écoulements dans les massifs de sols, qui consiste à la résolution de l'équation d'écoulement ($\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$), a pour objet la détermination de la charge hydraulique en tout point du massif étudié.

Cette étude débouche le plus *souvent sur une représentation graphique* constituée de deux familles de courbes : lignes de courant et lignes équipotentielles, appelées couramment *réseau d'écoulement* (Figure 1.22.a).

1.4.2.2 Milieu isotrope

Les lignes de courant, qui sont en tout point tangentes au vecteur-vitesse d'écoulement au point considéré, sont associées aux surfaces équipotentielles par la loi de Darcy : $\vec{v} = -\bar{\bar{k}}.\vec{i} = -\bar{\bar{k}}.\overrightarrow{gradh}$. Il y a lieu de noter que le gradient de la charge hydraulique est dans tous les cas un vecteur normal à la surface équipotentielle.

Lors d'un écoulement permanant, quel que soit le temps, la ligne de courant est perpendiculaire, en tout point, à la surface équipotentielle dont l'équation h = constante (Figure 1.22.a). En effet, $\overrightarrow{gradh}$ est perpendiculaire à cette surface car la vitesse $\vec{v}$ est tangente à la ligne de courant.

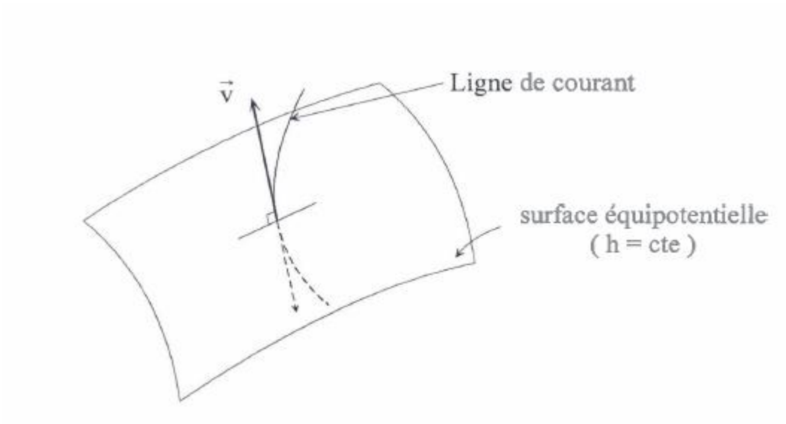


Figure 1.22.a : *Réseau d'écoulement*

En fait, si le tenseur de perméabilité est isotrope, le vecteur-vitesse d'écoulement est normal à la surface équipotentielle.

Donc dans le cas où le tenseur de perméabilité est isotrope, les vecteurs $\overrightarrow{i} = -.\overrightarrow{gradh}$ et $\overrightarrow{v} = -k.\overrightarrow{gradh}$ sont colinéaires (Figure 1.23) : ils définissent les lignes de courant auxquelles ils sont parallèles.
Les lignes de courants sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et par conséquent e vecteur-vitesse d'écoulement et le vecteur gradient hydrauliques sont perpendiculaires à la surface équipotentielle, comme on vient de le voir.

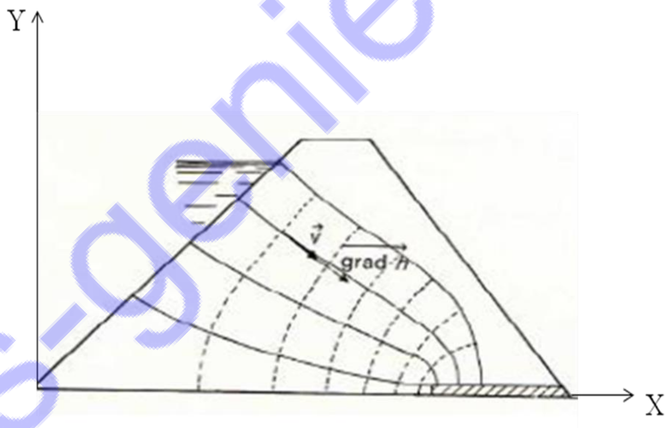


Figure 1.23 : *Loi de Darcy généralisée pour un milieu isotrope. Ecoulement plan dans une digue.*

1.4.2.3 Milieu anisotrope

Dans les milieux anisotropes, le vecteur de vitesse d'écoulement et le vecteur de gradient hydraulique ne sont plus colinéaires (Figure 1.24). Les lignes de courant ne sont donc plus orthogonales aux surfaces équipotentielles et le vecteur-vitesse, bien sur tangent à ligne de courant, fait un angle constant avec la ligne équipotentielle.
Il est, toutefois, possible de procéder par une *Transformation d'un domaine d'écoulement anisotrope en domaine isotrope équivalent* et on se ramène ainsi à une équation de Laplace $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ par un changement de variable (*Voir paragraphe 1.4.2.6, 2).*

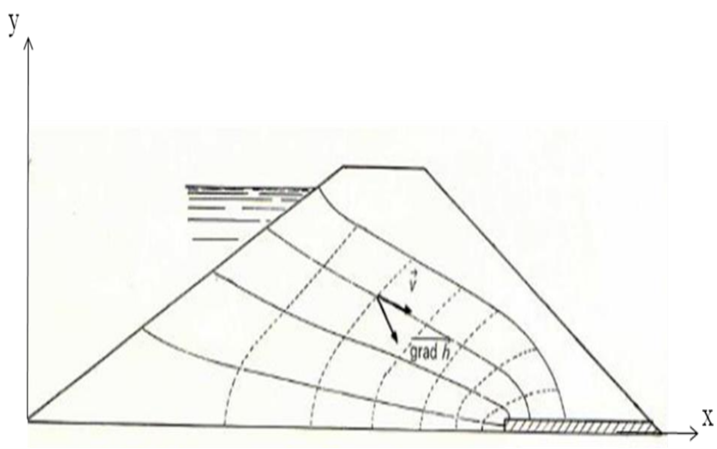


Figure 1.24 : *Loi de Darcy généralisée pour un milieu anisotrope. Ecoulement plan dans une digue.*

On observera que le réseau d'écoulement a certaines propriétés géométriques, dont nous verrons qu'elles peuvent contribuer à le tracer à la main.
Une autre observation importante pour la résolution des problèmes d'écoulement dans les sols est la similitude de l'équation à résoudre avec les équations qui régissent les écoulements dans d'autres domaines de la physique : thermique et électricité.
Le tableau 1.2 adresse un parallèle entre les variables et équations de ces trois domaines.

Tableau 1.2 *: Analogie des équations de thermique, électricité et hydraulique des sols.*

	HYDRAULIQUE DES SOLS	THERMIQUE	ÉLECTRICITÉ
1. Potentiel	Charge hydraulique h (m)	Température T (°K)	Potentiel V (V)
2. Stockage	Volume du fluide n (m^3/m^3)	Énergie thermique u (J/m^3)	Charge Q (C)
3. Conductivité	Coeff. de perméabilité k (m/s)	Conductivité thermique k_t (J/Kms)	Conductivité σ (C/sV)
4. Flux	Débit q (m_3/s)	Flux de chaleur q_t (J/s)	Intensité I (A)
5. Gradient	$i=-\frac{\partial h}{\partial x}$ (-)	$i_t=-\frac{\partial T}{\partial x}$ (K/m)	$i_e=-\frac{\partial V}{\partial x}$ (V/m)
6. Loi d'écoulement	Loi de Darcy $q=-k\frac{\partial h}{\partial x}A$	Loi de Fourier $q_t=-k_t\frac{\partial T}{\partial x}A$	Loi d'Ohm $I=-\sigma\frac{\partial V}{\partial x}A$
7. Capacitance	Coeff. de compressibilité $M=k/c_V$	Capacité thermique C (J/m^3K) C=dQ/dT	Capacitance C (F)
8. Continuité	$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{v}=0$	$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{v}_t=0$	$\frac{\partial Q}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{I}=0$
9. État permanent (homogène, isotrope)	$\Delta h=0$	$\Delta T=0$	$\Delta V=0$
10. Diffusion unidimensionnelle	$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{M}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ ($k/M=c_v$)	$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k_t}{C}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ($k_t/C=\alpha$)	$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\sigma}{C}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

1.4.2.4 Domaine d'intégration et conditions aux limites

Une fois connue l'équation aux dérivées partielles qui décrit l'écoulement local de l'eau dans le sol, la résolution des problèmes d'écoulement dans les massifs de sols nécessite

de définir le domaine d'intégration et ses frontières, et de préciser les conditions imposées aux inconnues sur ces frontières ou limites.
La définition du domaine d'intégration de l'équation de la charge hydraulique est un choix préalable décisif pour la qualité de la modélisation et des décisions qu'elle entraîne. Plusieurs modèles hydrauliques peuvent souvent être établis pour un même site et l'ingénieur doit choisir un point de vue adapté à son projet.
On examine les différentes conditions aux limites sur les exemples de l'écoulement à travers des ouvrages géotechniques, une digue (Figure 1.25), un batardeau (Figure 1.26) et une fouille soutenue par deux écrans parallèles (Figure 1.27). Les batardeaux et les écrans ont un rôle d'étanchéité et de soutènement. Pour les batardeaux, en rivière, en mer, le niveau de la nappe reste au-dessus du terrain naturel. Pour les fouilles, la nappe avant excavation se trouve en dessous du terrain naturel ; pendant l'excavation et le pompage, la nappe est rabattue et constitue une surface libre inconnue a priori.

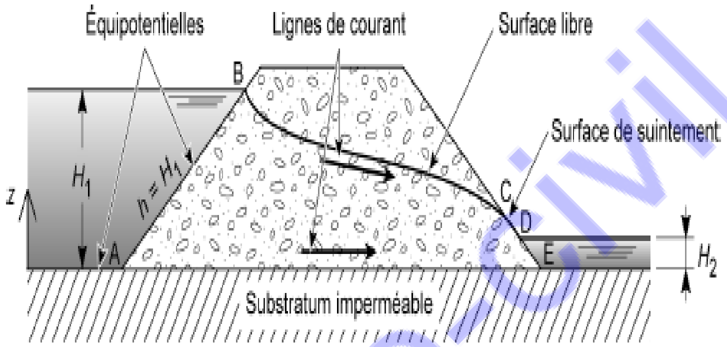


***Figure 1.25**: Ecoulement dans une digue.*

- **Condition de Neumann, flux imposé :**

Flux imposé le long des couches imperméables**,** étant donné qu'il n'y a pas de débit à travers ces couches, le flux est nul, ce qui se traduit par la condition de Neumann : $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$, avec n la direction normale à la surface imperméable.

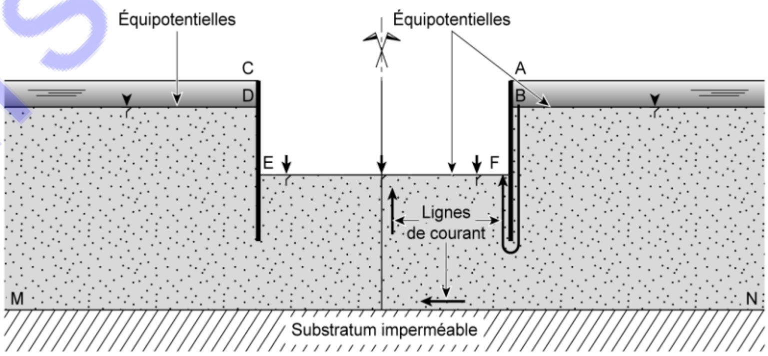


***Figure 1.26** : Écoulement dans un batardeau.*

On a donc des lignes de courant AE le long du substratum imperméable sous le corps de la digue (Figure 1.25), des lignes de courant MN le long du substratum imperméable du batardeau (Figure 1.26) et de la fouille (Figure 1.27). C'est aussi le cas des lignes de courant le long de l'écran considéré étanche pour le batardeau et la fouille. Enfin, par raison de symétrie, les lignes de courant sont verticales dans l'axe de symétrie du batardeau et de la fouille.

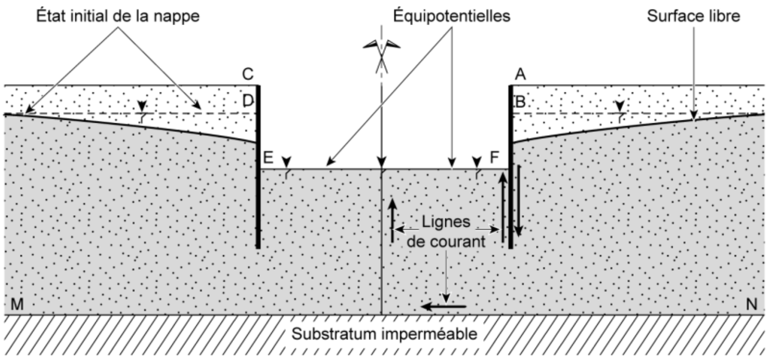


Figure 1.27 : *Écoulement dans une fouille.*

- **Condition de Dirichlet, potentiel imposé :**

Les surfaces filtrantes submergées sont orthogonales aux lignes de courant, la charge h est constante, ce qui se traduit par la condition de Dirichlet. Ce sont donc des équipotentielles**.** C'est le cas pour le parement amont AB de la digue pour l'équipotentielle h = H_1 et le parement aval DE pour l'équipotentielle h = H_2 (Figure 1.25) ; pour la surface du terrain submergée du batardeau (équipotentielles passant par B et D) et pour le fond EF (Figure 1.26).

Dans le cas du batardeau (Figure 1.26), l'écoulement est parfaitement défini par les deux équipotentielles précédemment définies (équipotentielles passant par B et D) et pour le fond EF et par les deux lignes de courant tangentes au substratum imperméable MN et aux écrans étanches ABF et CDE (Figure 1.26). Ce type d'écoulement est nommé écoulement confiné.
Ce n'est pas le cas pour les surfaces initiales passant par B et D pour la fouille (Figure 1.27), puisqu'il y a rabattement de la nappe ; par contre, le fond de fouille EF est une équipotentielle.
Dans le cas de la digue et de la fouille (Figures 1.25 et 1.27), la ligne de courant qui définit la surface libre n'est pas prédéterminée. Ce type d'écoulement est appelé non confiné.

- **Condition de surface libre et de suintement**

On détermine la position de la surface libre par le calcul. La surface libre s'établit en respectant les équations de l'écoulement. Le flux d'eau est nul à travers la surface libre, on a donc une première condition : $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$. Par ailleurs, sur la surface libre, la pression interstitielle est à la pression atmosphérique, qu'on prend comme pression de référence, donc $u = 0$. On a donc comme seconde condition : h = z. Dans le cas de la digue (Figure 1.25), les lignes de courant qui arrivent au-dessus de la nappe aval passant par D produisent un suintement entre C et D. La surface de suintement n'est ni une surface équipotentielle ni une surface de courant. L'eau sort à la pression atmosphérique : la pression interstitielle est donc également nulle et on a : h = z.

On peut synthétiser les principales conditions aux limites des écoulements au nombre de quatre (Figure 1.28) :

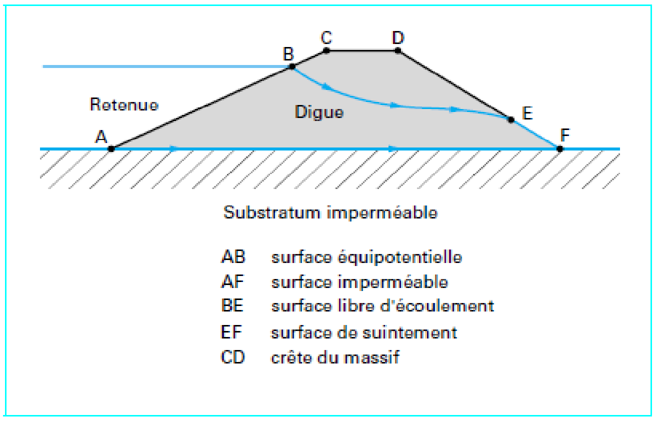


Figure 1.28 : *Conditions aux limites d'un écoulement* dans une digue.

Les conditions aux limites de l'écoulement sont les suivantes :

a) AB surface filtrante sur laquelle la charge hydraulique h est constante. La condition à la limite AB est h = constante (Condition de Dirichlet). C'est une surface équipotentielle. Le vecteur de vitesse d'écoulement est normal à cette surface ;
b) AF surface imperméable à travers laquelle le débit est nul. On en déduit que le gradient hydraulique selon la direction perpendiculaire $\vec{n}$ à AF est nul : $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ (condition de Neumann), et que le vecteur de vitesse d'écoulement est parallèle à une telle surface. AF est une surface de courant ;

c) BE est une surface libre d'écoulement, qui vérifie simultanément deux conditions : elle est tangente au vecteur de vitesse d'écoulement et la pression interstitielle y est égale à la pression atmosphérique (c'est-à-dire zéro) : $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$; u = 0 ou h = z. C'est une surface libre d'écoulement ;

d) EF surface de suintement, sur laquelle la pression de l'eau est nulle mais le vecteur de vitesse d'écoulement est dirigé vers l'extérieur du massif : $\frac{\partial h}{\partial n} > 0$; u = 0 ou h = z. La surface EF est un exemple de surface de suintement.

Pour mieux illustrer cette notion de conditions aux limites de la charge hydraulique, nous allons donc reprendre deux exemples d'écoulement : un rideau de palplanches et un barrage en terre.
Les figures 1.29 et 1.30 montrent les conditions aux limites retenues pour l'étude des écoulements autour d'un rideau de palplanches et à travers un barrage en terre homogène.
Les surfaces de contact avec des masses d'eau en équilibre hydrostatique sont des surfaces équipotentielles (charge hydraulique constante). Les surfaces imperméables (condition de débit normal nul, soit $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$) sont des lignes de courant. Dans le barrage, on trouve une surface libre. Enfin, l'écoulement débouche sur la face aval du barrage, qui constitue une surface de suintement.

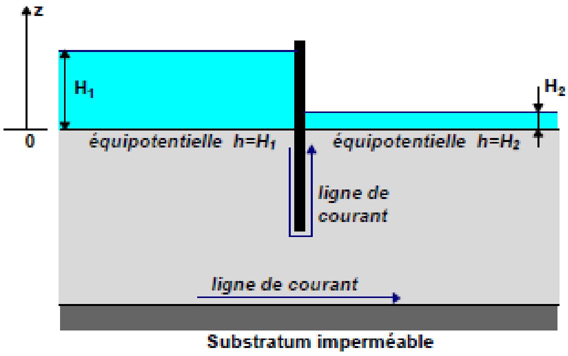


Figure 1.29 : *Conditions aux limites pour l'écoulement autour d'un rideau de palplanches.*

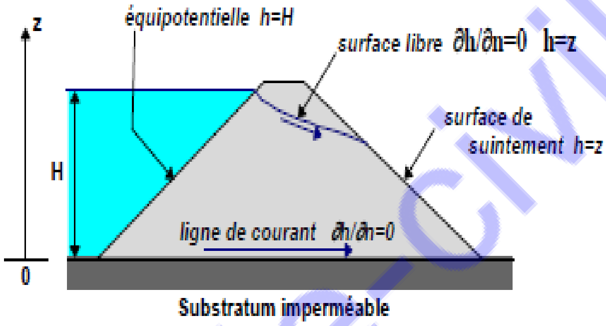


Figure 1.30 : *Conditions aux limites pour l'écoulement à surface libre à travers un barrage en terre homogène.*

1.4.2.5 Réseau d'écoulement unidimensionnel

Dans un écoulement unidimensionnel, tous les paramètres tels que la pression, la vitesse sont constants dans n'importe quel plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Nous allons examiner dans cette partie des cas simples d'écoulements permanents, dont la solution peut être obtenue sans calcul, en appliquant quelques règles de bon sens, compte tenu des conditions aux limites et des propriétés élémentaires des lignes de courant et des équipotentielles.

Soit un tube de section S (Figure 1.31) rempli d'un sol homogène de perméabilité k, dont l'axe est disposé selon (ox), on a un écoulement suivant (ox). Considérons un segment MN de longueur L. Le gradient hydraulique, constant, vaut :

$$i = \frac{h_A - h_B}{L} = \frac{h_M - h_N}{L}$$

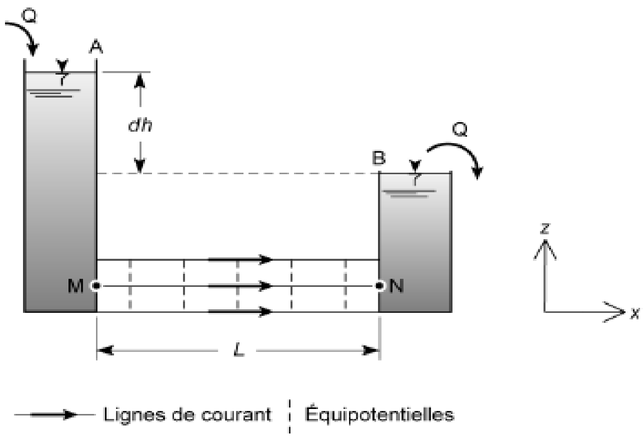


Figure 1.31*:Ecoulement unidimensionnel.*

Les lignes de courant sont parallèles au tube, les surfaces équipotentielles sont orthogonales à l'axe du tube. La variation de la charge en fonction de x est, selon l'équation suivante : $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$. En intégrant, on obtient h(x) = ax+b, qui décroît linéairement de M à N :

$$h(x) = h_M - \frac{(h_M - h_N).x}{L}$$

La vitesse d'écoulement est constante, égale à : v = k.i. La section du tube étant orthogonale à l'axe x, le débit est égal à Q = v.S.

Application numérique :

Considérons un tube rempli d'un sable homogène de coefficient de perméabilité k = 10^{-4} m/s, de longueur 10 mètres et de diamètre 50 cm, qui relie deux réservoirs dont l'un a une charge hydrostatique de 10 m et l'autre une charge hydrostatique de 5 mètres (Figure 1.32).

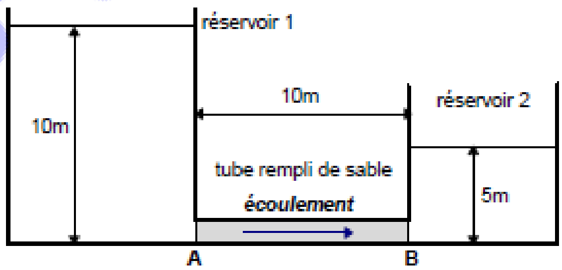


Figure 1.32 *: Ecoulement dans un tube rempli de sable.*

Les lignes de courant d'un tel écoulement sont parallèles à l'axe du tube (Figure 1.33). Elles sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles imposées aux deux extrémités du tube et aux surfaces équipotentielles internes, qui sont des plans verticaux. La charge hydraulique diminue linéairement entre l'extrémité A et l'extrémité B du tube, où elle a les valeurs imposées, et le gradient hydraulique est constant. La vitesse d'écoulement est égale au produit du gradient hydraulique par le coefficient de perméabilité. Le débit est égal au produit de la vitesse d'écoulement par la section du tube. La pression interstitielle varie linéairement en fonction de la profondeur et en fonction de la distance dans le tube. On peut retrouver les résultats précédents en intégrant l'équation différentielle $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$ avec les conditions aux limites indiquées, en observant que les conditions aux limites sur les parois du tube imposent que l'écoulement soit parallèle à l'axe des x et que la charge hydraulique ne dépende donc pas de z.

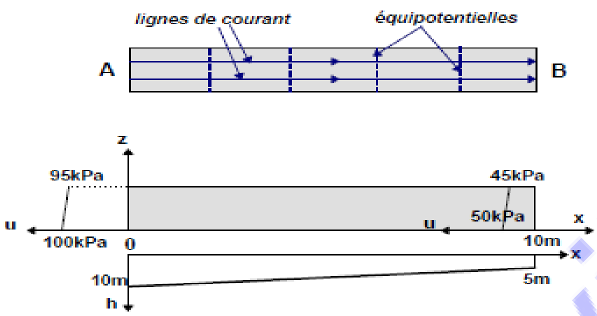


Figure 1.33 *: Caractéristique de l'écoulement dans le tube de la figure 1.32.*

Conditions aux limites :

- h_A = 10m.
- h_B = 5m.
- tube imperméable : lignes de courant parallèles à l'axe ox.

Distribution de la charge h est telle que l'équation : $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$, on obtient : $h(x) = 10 - \frac{x}{2}$.

Gradient hydraulique : i = 0,5.
Vitesse d'écoulement : v = 5.10^{-5} m/s.
Débit : q = π (0, 5)^2.5.10^{-5} m^3/s , soit q = 39 cm^3/s = 14 litres/h.

<u>Multicouche :</u>

Les sols sont constitués de strates superposées de granulométrie variable, et de perméabilité changeante en fonction des différentes couches.
Lorsque le massif de sol est constitué d'un ensemble de couches superposées, d'épaisseur H_i et de coefficient de perméabilité k_i, l'écoulement unidimensionnel de l'eau s'analyse différemment selon qu'il se produit dans le plan des couches ou dans la direction perpendiculaire (Figure 1.34).
.

L'écoulement horizontal est un écoulement parallèle aux strates (Figure 1.34.a) : la perte de charge est la même pour chaque strate, donnant donc le même gradient hydraulique quelque soit la strate. Le débit total du sol est la somme des débits dans chaque strate.

L'écoulement vertical est un écoulement perpendiculaire aux strates (Figure 1.34.b) : le débit est le même à travers chaque strate, la vitesse *v* est donc la même. La perte de charge totale est la somme des pertes de charge de chaque strate.

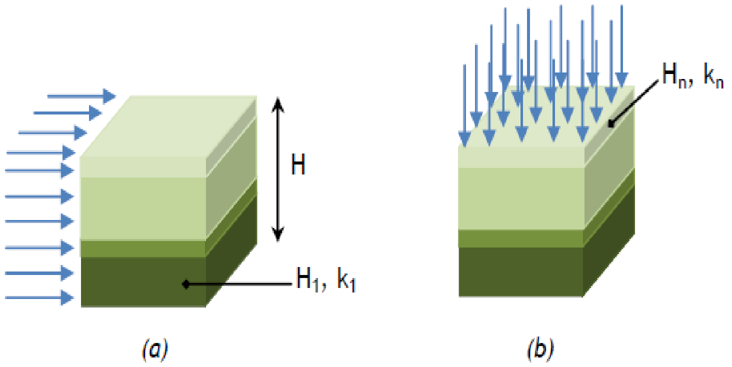


Figure 1.34 : *Ecoulements : (a) parallèles aux strates ; (b) perpendiculaires aux strates.*

a) Ecoulement vertical

Lorsque l'écoulement de l'eau est perpendiculaire au plan des couches (Figure 1.35), toute l'eau qui traverse une couche traverse les autres, c'est à dire que toutes les vitesses d'écoulement sont égales. Par contre, la différence de charge hydraulique entre les surfaces supérieure et inférieure du massif est égale à la somme des pertes de charge dans les différentes couches.

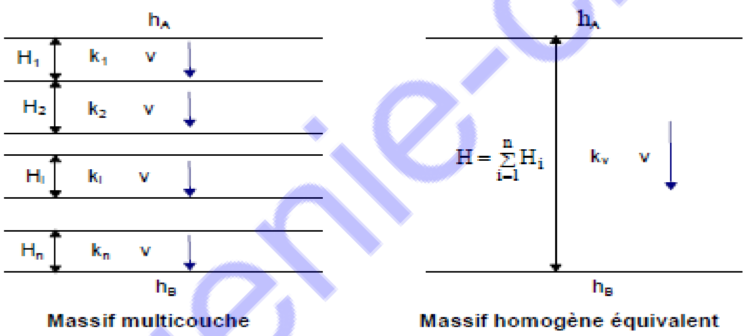


Figure 1.35 *: Massif multicouche : écoulement vertical.*

Donc la perte de charge totale Δh (h_A- h_B) est égale à la somme des pertes de charge Δh_i dans chaque couche. Les variations des charges Δh_i à l'intérieur de chaque couche sont linéaires. Par application du principe de continuité de l'écoulement, le débit est constant à travers chaque interface, donc la vitesse est identique dans toutes les couches. On peut écrire en appliquant la loi de Darcy :

$q_1 = v_1.S_1$
$q_2 = v_2.S_2$
.
.
$q_i = v_i.S_i$
.
.
$q_n = v_n.S_n$

On suppose une section transversale unitaire : $S_1 = S_2 = \ldots\ldots S_n = 1\ m^2$.

Comme, c'est le même débit qui traverse toutes les couches, c'est-à-dire que $q_1 = q_2 = q_3 = q_i$ ……$= q_n$, on a donc $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots v_i = \ldots\ldots v_n = v$.

$$v = k_1 \frac{\Delta h_1}{H_1}\ ;\ v = k_i \frac{\Delta h_i}{H_i}\ ;\ v = k_n \frac{\Delta h_n}{H_n}$$

Donc pour la couche i : $\Delta h_i = v \dfrac{H_i}{k_i}$

La différence de charge totale (Figure 1.35) : $(h_A - h_B) = \Delta h = \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = v.\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{k_i}$.

En considérant un massif homogène équivalent (Figure 1.35 à droite), on a :

$$v = k_v.\frac{\Delta h}{\sum_{i=1}^{n} H_i} \quad \text{d'où} \quad \Delta h = v.\frac{\sum_{i=1}^{n} H_i}{k_v} = v.\frac{H}{k_v}\text{, on aura alors :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{k_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i}{k_v}$$

On démontre ainsi que l'écoulement perpendiculaire à la stratification d'un massif multicouche est équivalent à un écoulement dans un massif homogène de coefficient de perméabilité équivalent k_v, donné par la formule :

$$\boxed{\frac{1}{k_v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} H_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{k_i}} \quad \text{Ce qui donne :} \quad \boxed{k_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{k_i}} = \frac{H}{\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{k_i}}}$$

Le coefficient de perméabilité équivalent dans le sens perpendiculaire aux couches est souvent appelé «*coefficient de perméabilité équivalent vertical*» du multicouche.

- **<u>Exemple :</u>**

Soit un tricouche composé du haut vers le bas de 5 m d'argile, avec une perméabilité $k = 10^{-10}$ m/s, de 1 m de sable avec une perméabilité $k_s = 10^{-5}$ m/s et de 4 m d'argile avec une perméabilité $k = 10^{-10}$ m/s.
La perméabilité k_v est égale à $1{,}1 \times 10^{-10}$ m/s = environ à 10^{-10} m/s = k (perméabilité de l'argile). C'est le cas, par exemple, pour les batardeaux, où à l'amont on a une couche de sol grenu (gravier, sable) surmontant une couche de sol fin (limon, argile). Il n'y a pas de perte de charge dans la couche de sol grenu, toute la perte de charge est concentrée dans la couche de sol fin.
On remarque que pour des couches d'épaisseur à peu près égales, c'est la couche la plus imperméable qui conditionne la valeur de k_v. L'essentiel de la perte de charge y sera aussi concentré.

b) Ecoulement horizontal

Lorsque le mouvement de l'eau est parallèle au plan des couches (Figure 1.36), les lignes de courant sont parallèles à ces plans et l'eau qui entre dans une couche y reste. Le débit total est égal à la somme des débits dans chaque couche et la loi de Darcy s'écrit dans chaque couche en fonction du gradient hydraulique commun à toutes les couches.

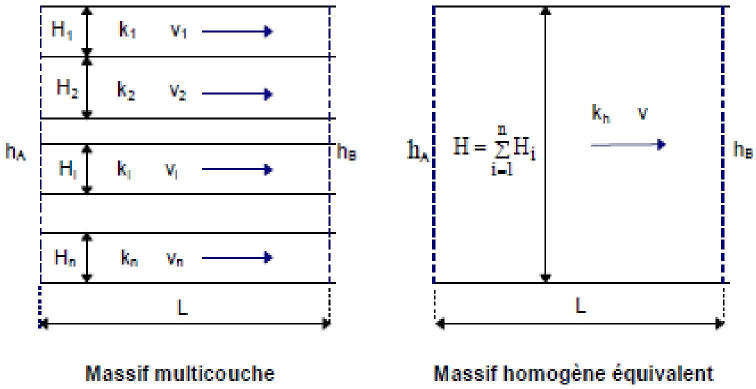


Figure 1.36: *Massif multicouche : écoulement horizontal (parallèle au plan des couches).*

Les lignes de courant sont horizontales. Entre deux équipotentielles verticales, la perte de charge Δh est constante donc le gradient hydraulique est le même pour toutes les couches. On écrit que le débit total Q est la somme des débits q_i dans chaque couche i et on applique la loi de Darcy pour une unité de largeur :

Le débit qui traverse la couche i est $q_i = .v_i .S_i$, avec v_i vitesse de l'eau dans la couche i, S_i section transversale de la couche i. En considérant une unité de largeur pour chaque couche, alors $S_i = H_i .1$

Le gradient hydraulique $i = \frac{\Delta h}{L}$; la vitesse $v_i = k_i .i$, alors :

$$q_i = v_i .H_i .1 = k_i .\frac{\Delta h}{L}.H_i .1.$$

$$q_1 = k_1 .\frac{\Delta h}{L}..H_1 .1 \; ; \; q_2 = k_2 .\frac{\Delta h}{L}.H_2 .1 \; ; \; q_3 = k_3 .\frac{\Delta h}{L}.H_3 .1 \; ; \; .... \; q_n = k_n .\frac{\Delta h}{L}.H_n .1$$

On aura donc un débit total $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} v_i .S = \sum_{i=1}^{n} v_i .H_i .1 = \sum_{i=1}^{n} k_i .\frac{\Delta h}{L}.H_i$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} k_i .H_i .\frac{\Delta h}{L}$$

On peut définir un coefficient de perméabilité équivalent k_h du multicouche (Figure 1.36 à droite) en écrivant que le débit Q est aussi égal à :

$$Q = k_h .\frac{\Delta h}{L}.\sum_{i=1}^{n} H_i$$

On aura alors $k_h \frac{\Delta h}{L} \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} k_i .H_i .\frac{\Delta h}{L}$

$$k_h .\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} k_i .H_i .$$

On en déduit que l'expression du coefficient de perméabilité est :

$$\boxed{k_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i.H_i}{\sum_{i=1}^{n} H_i} = \frac{1}{H}.\sum_{i=1}^{n} k_i.H_i}$$

Dans la nature la plupart des sols multicouches sont composés de couches horizontales et le coefficient de perméabilité équivalent pour un écoulement dans le plan des couches est généralement appelé «*coefficient de perméabilité horizontal équivalent*».
Si on reprend l'exemple du tricouche ci-dessus, on constate que la perméabilité horizontale k_h est égale à 10^{-6}m/s. D'après ce résultat, c'est la couche la plus perméable qui influence le plus la perméabilité k_h : $k_h = 10^{-6}$ m/s est plus proche de la perméabilité du sable $k_s = 10^{-5}$ m/s que celle de l'argile dont la valeur est $k = 10^{-10}$ m/s.
Dans les terrains stratifiés, du fait de la sédimentation et de la consolidation suivant la verticale, le coefficient de perméabilité vertical k_v est inférieur au coefficient de perméabilité horizontal k_h. La perméabilité est plus grande dans le sens de la stratification que perpendiculairement ($\frac{k_h}{k_v} > 1$). Ceci montre la difficulté d'avoir une valeur fiable de la perméabilité dans les vallées où les dépôts de sédiments entrecroisés comportent des sols fins (argile, limon) avec des passages de sols grossiers beaucoup plus perméables (sable et gravier).
Si l'on considère ce multicouche comme un terrain unique anisotrope, de perméabilité horizontale k_h et verticale k_v, la loi de Darcy s'écrit en supposant que les directions horizontale et verticale sont principales :

$$v_x = -k_h.\frac{\partial h}{\partial x} \; ; \; v_y = -k_h.\frac{\partial h}{\partial y} \; ; \; v_z = -k_v.\frac{\partial h}{\partial z}.$$

1.4.2.6 *Réseau d'écoulement bidimensionnel*

Dans la plupart des ouvrages de génie civil où la circulation de l'eau dans le sol joue un rôle important, l'écoulement est tridimensionnel, c'est-à-dire que l'eau peut s'écouler suivant les trois directions de l'espace à la fois. A cause des difficultés que présenterait l'étude d'un tel écoulement, il est souvent possible de le simplifier en le considérant comme un écoulement bidimensionnel qui traverse le sol suivant des trajets à la fois horizontaux et verticaux (Figure 1.37). Dans un écoulement bidimensionnel, tous les paramètres tels que pression, la vitesse sont constants dans des plans parallèles.

En général, les problèmes d'hydraulique des sols se rattachent à l'étude d'écoulement à deux dimensions. C'est le cas très courant des ouvrages ayant une grande dimension orthogonalement à la direction de l'écoulement et homogènes suivant cette dimension (digues, barrages, rideaux de palplanches...). Connaissant les conditions aux limites, on peut déterminer les réseaux d'écoulement.

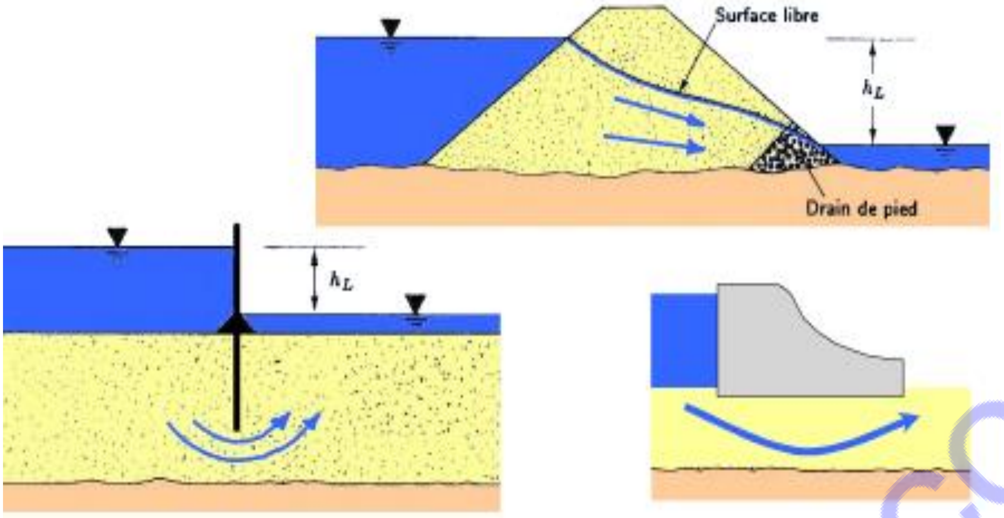


***Figure 1.37**: Problème bidimensionnel d'écoulement d'eau dans les sols.*

1) Ecoulement homogène isotrope

Les problèmes d'écoulements permanents sont souvent traités sous forme bidimensionnelle, en simplifiant les données réelles pour bénéficier des nombreuses méthodes d'analyse disponibles. Elles s'appliquent donc strictement à des massifs de sols dont la perméabilité est isotrope. Ces méthodes ont été développées principalement autour de la résolution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$, en tenant compte des conditions aux limites imposées.

La fonction charge hydraulique h(x,y) est une fonction harmonique qui doit satisfaire à l'équation de Laplace ainsi qu'aux conditions aux limites de l'écoulement.

Ainsi, l'équation de Laplace $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ admet comme solution, sur le domaine d'écoulement, deux familles orthogonales de courbes qui définissent un réseau d'écoulement.

En pratique, la résolution de l'équation de Laplace consiste à déterminer :

- les lignes équipotentielles le long desquelles la charge hydraulique h(x,y) = constante ;
- les lignes de courants où $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$, ($\vec{n}$ est la direction normale à la ligne de courant).Autrement dit, en tout point M d'une ligne de courant la condition $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ est satisfaite. Cette condition exprime que le débit traversant une ligne de courant est nul (aucun écoulement ne traverse la ligne de courant).

Les lignes de courants et lignes équipotentielles constituent un réseau orthogonal appelé réseau d'écoulement (Figure 1.38). En effet, en tout point M, la ligne de courant est perpendiculaire à la ligne équipotentielle : soit P très voisin de M sur l'équipotentielle passant par M. La perte de charge entre M et P est $(-dh)_{MP} = \vec{i}.\overrightarrow{MP}$. Or $(-dh)_{MP} = 0$ (il n' y a pas de perte de charge sur une équipotentielle), donc les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont perpendiculaires.

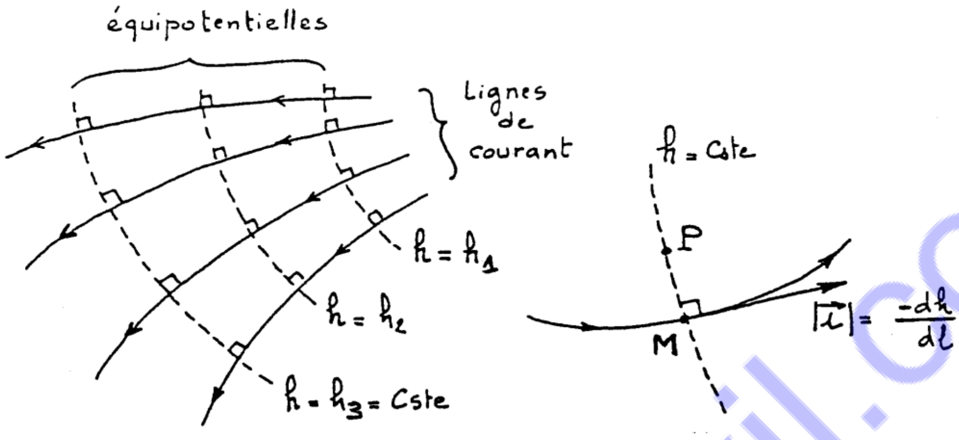


Figure 1.38 *: Réseau d'écoulement isotrope.*

2) Ecoulement homogène anisotrope

Dans le cas plus général où la perméabilité du sol est anisotrope et décrite par deux coefficients de perméabilité k_x et k_y dans les directions perpendiculaires (ox) et (oy), l'équation aux dérivées partielles qui régit l'écoulement $div\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (équation de continuité) implique que $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ qui n'est pas une équation de Laplace et la charge h n'est plus une fonction harmonique : on voit bien que, contrairement au cas du milieu isotrope, la charge hydraulique h ne vérifie pas l'équation de Laplace. Le réseau d'écoulement n'est donc plus constitué de courbes orthogonales. Il est, toutefois, possible d'utiliser la solution d'un problème isotrope pour obtenir celle du problème anisotrope étudié, en procédant par changement de variable, comme indiqué ci-après (*Transformation d'un domaine d'écoulement anisotrope en domaine isotrope équivalent) :*
On se ramène à une équation de Laplace par un changement de variable :

Si l'on fait subir au domaine d'écoulement la transformation géométrique définie par :

$$\begin{cases} X = x\sqrt{\dfrac{k_x}{k_y}} \\ Y = y \end{cases}$$

On retrouve l'équation de Laplace caractérisant la distribution de la charge en milieu isotrope : $\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} = 0$.

L'étude d'un écoulement dans un milieu homogène anisotrope peut donc se ramener à l'étude d'un écoulement dans un milieu isotrope, obtenu en multipliant les dimensions du milieu réel dans la direction (ox) par $\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$, les dimensions dans la direction (oy) restant inchangées.

On obtient les équipotentielles et lignes de courant de l'écoulement réel en appliquant la transformation inverse aux équipotentielles et lignes de courant du réseau d'écoulement associé (Figure 1.39).
Le débit traversant le milieu anisotrope est calculé en affectant au milieu associé le coefficient de perméabilité : $k = \sqrt{k_x . k_y}$.

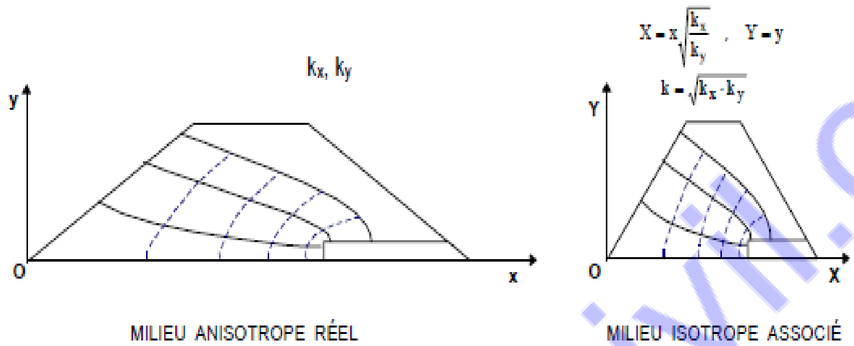


Figure 1.39 *: Transformation d'un milieu anisotrope en milieu isotrope associé.*

<u>Exemple d'écoulement radial cylindrique :</u>

L'analyse de l'écoulement radial dans un plan est très semblable à celle de l'écoulement unidimensionnel : on devine facilement que les lignes de courant sont des droites radiales et les équipotentielles des cercles concentriques (Figure 1.40). On établit ensuite aisément l'expression de la charge hydraulique « h » et de la vitesse d'écoulement «v » en fonction de la distance « r » au centre du cercle équipotentiel central de rayon r_o et de la distance r_1 du cercle extérieur où est imposée la seconde condition à la limite de l'écoulement.

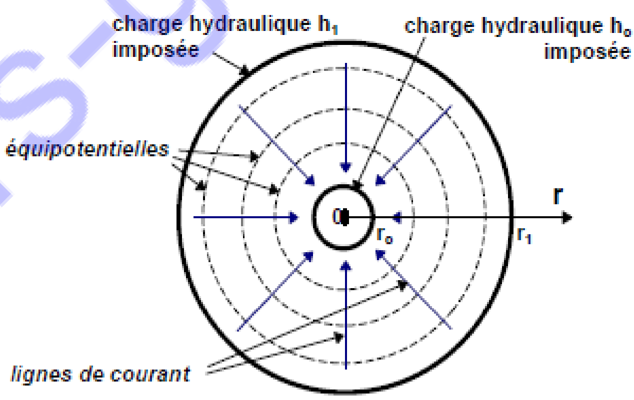


Figure 1.40*: Ecoulement radial cylindrique.*

Le débit q traversant les différentes équipotentielles est le même. Ce débit traverse un anneau de rayon r dont l'épaisseur unitaire (épaisseur = 1), tel que $r_0 \le r \ge r_1$:

$$q = v.S \text{ ; avec } S = 2\pi.r.1.$$

La loi de Darcy nous donne, dans un écoulement suivant un rayon r décroissant : $v = k.i = k.\frac{dh}{dr}$, avec $i = \frac{dh}{dr}$. On aura ainsi : $q = 2\pi.r.1.v = 2\pi.r.k.\frac{dh}{dr}$.

On en déduit que la charge hydraulique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dr} = \frac{q}{2\pi.k.r}$$

$\frac{dh}{dr} = \frac{q}{2\pi.k.r}$, ceci implique que $2\pi.k.dh = q.\frac{dr}{r}$.

$\int_{r_0}^{r_1} q.\frac{dr}{r} = \int_{h_0}^{h_1} 2\pi.k.dh$, donc $q.\ln[r]_{r_0}^{r_1} = 2\pi.k[h]_{h_0}^{h_1}$

$q.\ln(r_1 - r_0) = 2\pi.k(h_1 - h_0)$, donc $q = \frac{2\pi k(h_1 - h_0)}{\ln(r_1 - r_0)}$

$$\boxed{q = \frac{2\pi k(h_1 - h_0)}{\ln(r_1 - r_0)}}$$

Détermination de la charge hydraulique h(r) :

$\int_{r_0}^{r} q.\frac{dr}{r} = \int_{h_0}^{h} 2\pi.k.dh$ nous donne : $q.\ln(r - r_0) = 2\pi.k(h - h_0)$

Alors : $h = \frac{q.\ln(r - r_0) + 2\pi.k.h_0}{2\pi.k}$

On remplace le débit q par sa valeur $\boxed{q = \frac{2\pi k(h_1 - h_0)}{\ln(r_1 - r_0)}}$ déjà calculée , pour avoir :

$$h = \frac{\frac{2\pi.k(h_1 - h_0)}{\ln(r_1 - r_0)}.\ln(r - r_0) + 2\pi.k.h_0}{2\pi.k}$$

En fin : $\boxed{h(r) = h_0 - (h_0 - h_1)\frac{\ln r - \ln r_0}{\ln r_1 - \ln r_0}}$ et $\boxed{u(r) = \gamma_w(h - z)}$

1.4.3 Etude des réseaux d'écoulement : Méthode de résolution graphique

<u>Exemple d'écoulement plan :</u>

(À suivre)….. ⇨