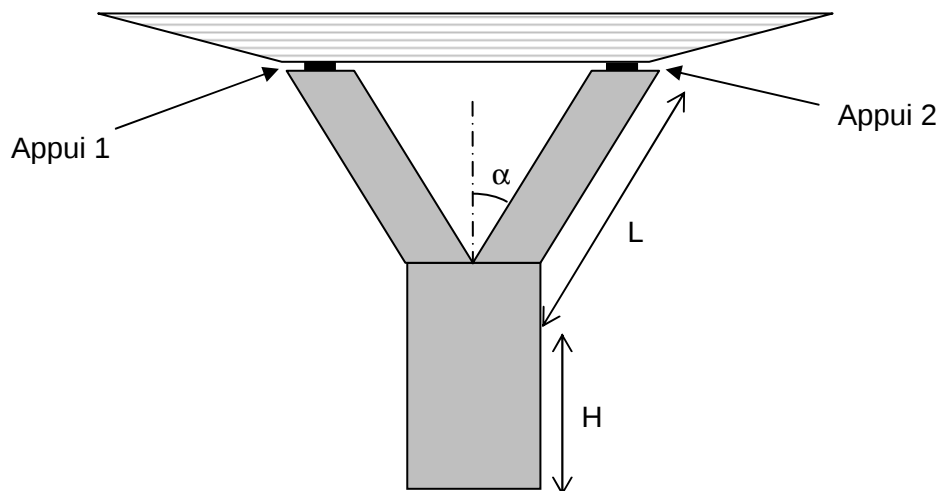


APPLICATION 4
CONTRAINTES TANGENTES

On étudie une pile de pont ayant une forme de Y :

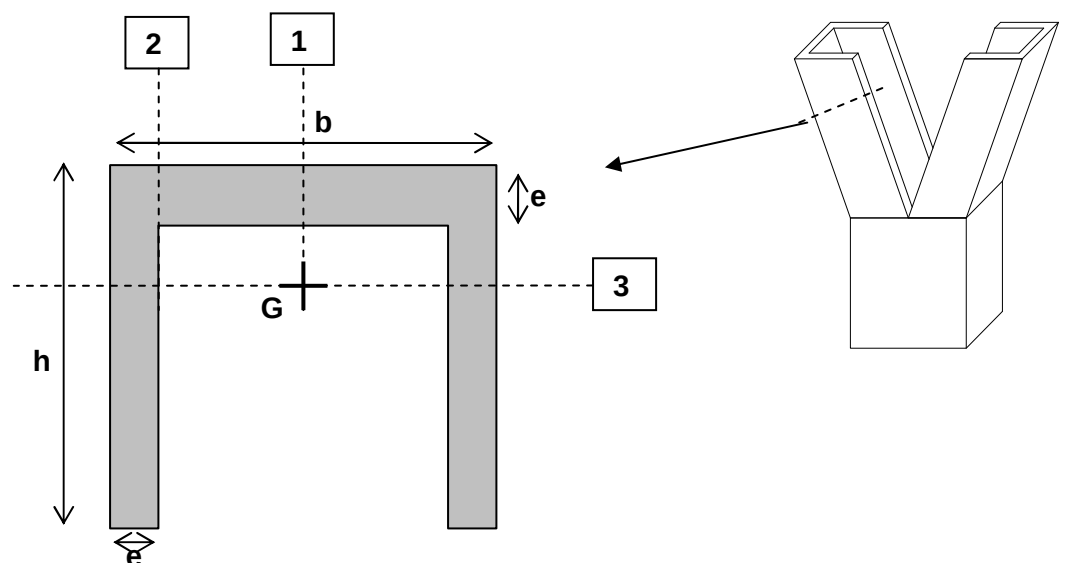


Le tablier transmet à chacun des deux appuis de la pile des charges P_1 et P_2 (hypothèse : $P_1 \geq P_2$) verticales dirigées vers le bas.

La pile est encastree en pied.

- 1) Modéliser la structure et son chargement.
- 2) Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure et calculer les réactions d'appuis.
- 3) Calculer les sollicitations dans la structure et tracer les diagrammes associés.

La section transversale de chaque branche de la pile est la suivante :



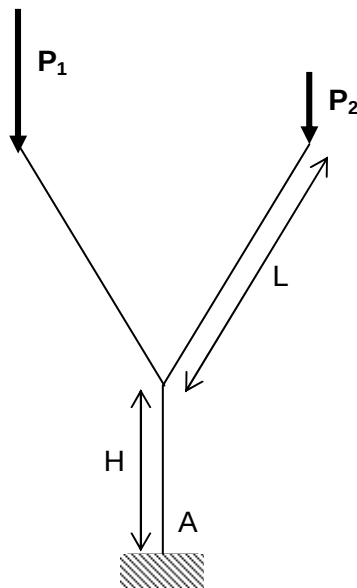
- 4) Calculer les caractéristiques de la section (section, position du centre de gravité, inerties). Application numérique.
- 5) Dans un branche de la pile, déterminer les valeurs et les directions des contraintes de cisaillement obtenues dans les lignes de coupure 1, 2 et 3. Application numérique. Que dire de τ_3 , contrainte obtenue suivant la ligne de coupure 3 ?
- 6) La pile étant réalisée en béton armé, on cherche à limiter la contrainte de cisaillement à 4 MPa.
Pour cela, on décide d'augmenter l'épaisseur des voiles de la pile. Une épaisseur $e = 80$ cm est-elle suffisante ? Si cette épaisseur ne suffit pas, trouver la valeur de e minimale nécessaire en procédant par dichotomie par exemple.

Données numériques :

- $L = 40$ m
- $H = 30$ m
- $h = 12$ m
- $b = 6$ m
- $e = 0.65$ m
- $\alpha = 20^\circ$
- $P_1 = P_2 = 200$ MN

CORRIGÉ

1) Modélisation de la structure :

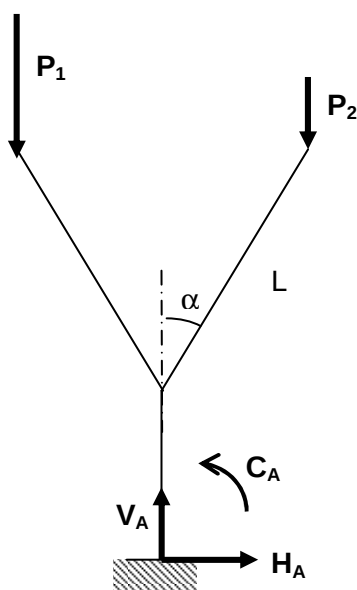


2) Degré d'hyperstaticité :

- encastrement $\rightarrow$ 3 inconnues
- 3 équations
- $\rightarrow h = 0$, structure isostatique

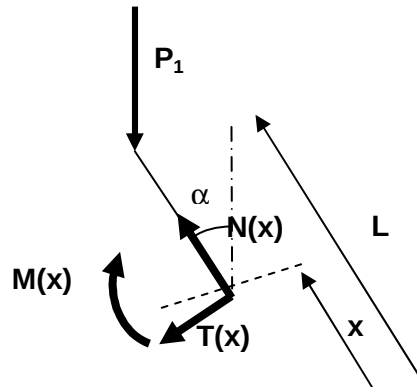
Réactions d'appuis

- $H_A = 0$
- $V_A = P_1 + P_2$
- $P_1 * L \sin(\alpha) - P_2 * L \sin(\alpha) + C_A = 0$
- $\rightarrow C_A = (P_2 - P_1) * L \sin(\alpha)$



3) Sollicitations

- $0 < x < L$ (origine des x à l'intersection des branches du y)
- a) Branche de gauche



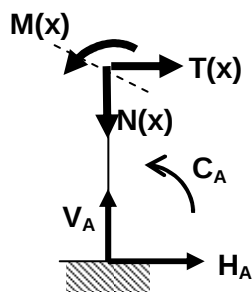
- o $N - P_1 \cos(\alpha) = 0 \rightarrow N = P_1 \cos(\alpha)$
- o $T + P_1 \sin(\alpha) = 0 \rightarrow T = -P_1 \sin(\alpha)$
- o $M - P_1 (L - x) \sin(\alpha) = 0 \rightarrow M = P_1 (L - x) \sin(\alpha)$

b) Branche de droite

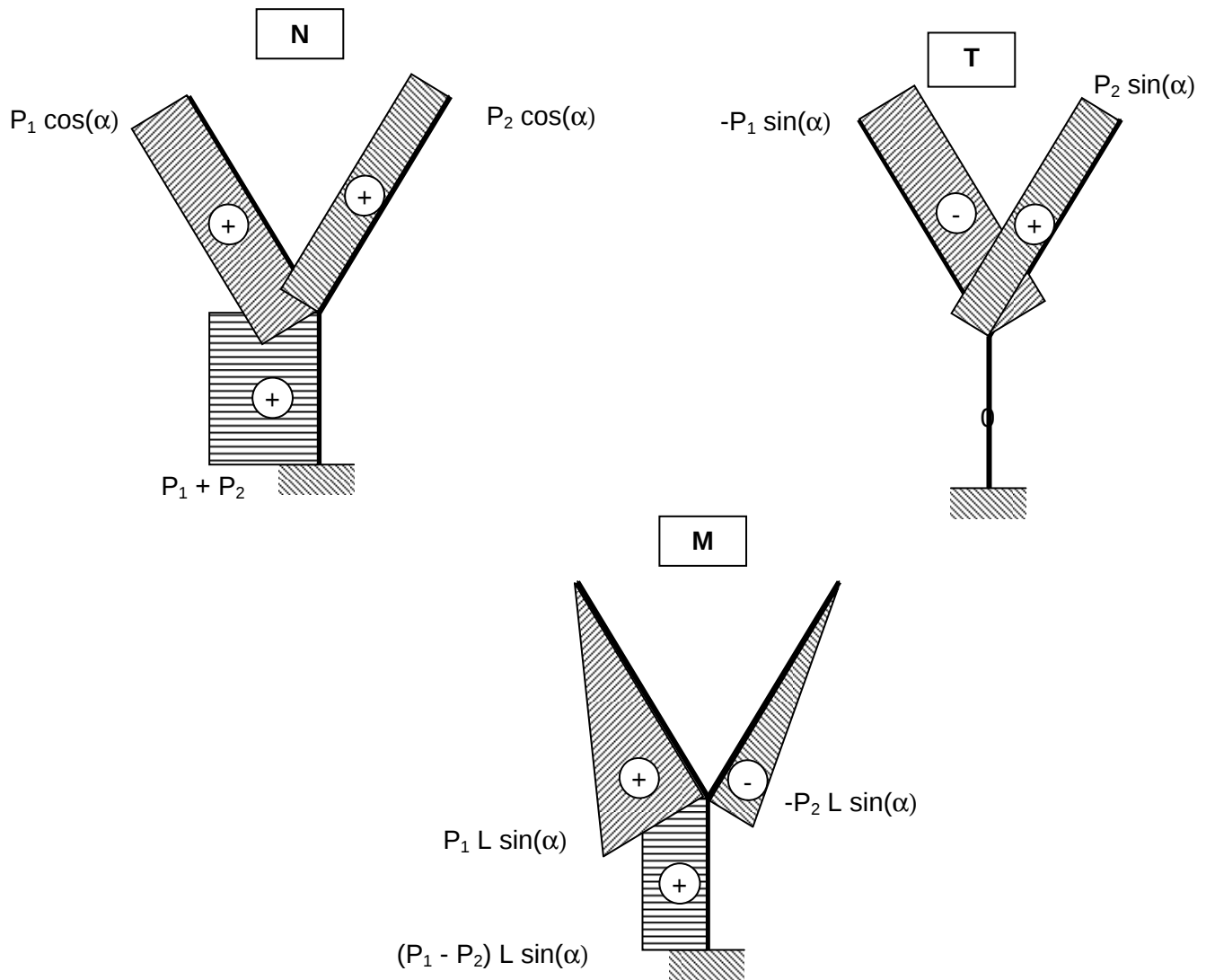
Par identification avec le cas précédent :

- o $N = P_2 \cos(\alpha)$
- o $T = P_2 \sin(\alpha)$
- o $M = -P_2 (L - x) \sin(\alpha)$

- $0 < x < H$ (origine des x à l'encastrement)

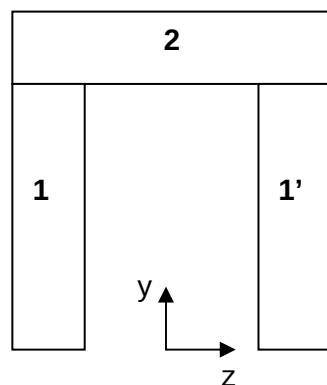


- o $N - V_A = 0 \rightarrow N = V_A = P_1 + P_2$
- o $T + H_A = 0 \rightarrow T = 0$
- o $M + C_A = 0 \rightarrow M = -C_A = (P_1 - P_2) * L \sin(\alpha)$



4) Caractéristiques de la section

On subdivise la section de la manière suivante :



e 0.65 m
h 12.00 m
b 6.00 m

section	b m	h m	S m ²	y _{Gi} m	m _{yi} m ³	I _{zi} m ⁴	z _{Gi} m	I _{yi} m ⁴
1	0.65	11.35	7.38	5.68	41.87	316.80	2.68	53.05
1'	0.65	11.35	7.38	5.68	41.87	316.80	-2.68	53.05
2	6.00	0.65	3.90	11.68	45.53	531.73	0.00	11.70
Σ			18.66		129.27	1165.32		117.80

S 18.66 m²

y_G 6.93 m

I_{Gz} 269.58 m⁴

I_{Gy} 117.80 m⁴

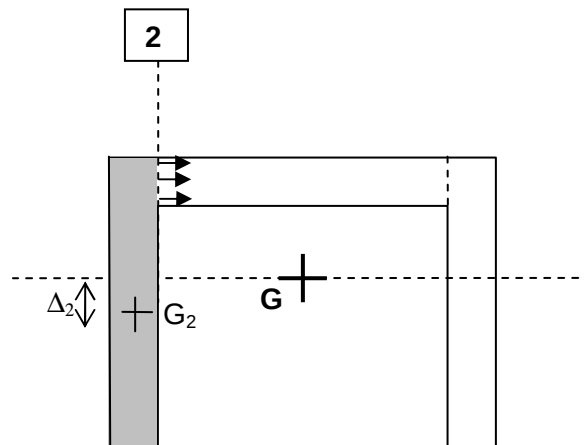
(I_{Gz} calculé avec le théorème de Huygens : I_{Gz} = I_z – S*y_g²)

5) Caractéristiques de la section

- ligne de coupure 1 :

τ₁ = 0 car m(y) = 0 : la coupure 1 est confondue avec Gz, axe de symétrie de la section.

- ligne de coupure 2 :



On a pour la surface 2 grisée :

$$m(y) = S \cdot (y_G - y_{G,2}) = h \cdot e \cdot \Delta_2 = 7.25 \text{ m}^2$$

$$b(y) = 0.65 \text{ m}$$

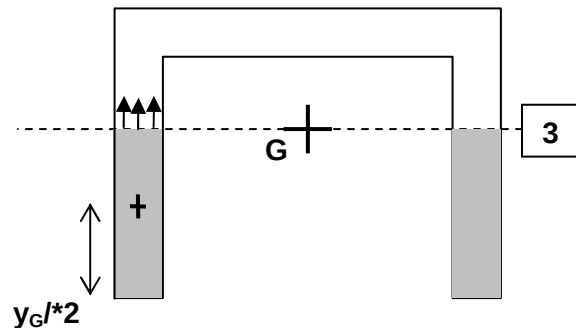
$$\text{Avec } \tau_2 = T \cdot m(y) / (I_z \cdot b(y))$$

Soit pour la section où T est maximal :

$$T_{\max} = T \sin(\alpha) = 200 \cdot \sin(20^\circ) = 68.4 \text{ MN}$$

$$\tau_2 = 68.4 \cdot 7.25 / (269.6 \cdot 0.65) = 2.83 \text{ MPa}$$

- ligne de coupure 3 :



On a pour la surface grisée :

$$m(y) = S \cdot y_G / 2 = y_G \cdot 2e \cdot y_G / 2 = e \cdot y_G^2$$

$$b(y) = 2e$$

$$\tau_3 = T \cdot y_G^2 / (2 I_{Gz})$$

Soit pour la section où T est maximal :

$$\tau_3 = 68.4 \cdot 6.93^2 / (2 \cdot 269.6) = 6.09 \text{ MPa}$$

On coupe au niveau du CdG, c'est donc le cisaillement maximal dans la section.

6) Cisaillement dans le cas où e = 0.80 m

On recalcule la contrainte τ_3 , en n'oubliant pas de recalculer l'inertie de la section.

On trouve :

e	0.80 m
h	12.00 m
b	6.00 m

section	b m	h m	S m ²	y _{Gi} m	m _{yi} m ³	I _{zi} m ⁴	z _{Gi} m	I _{yi} m ⁴
1	0.80	11.20	8.96	5.60	50.18	374.65	2.60	61.05
1'	0.80	11.20	8.96	5.60	50.18	374.65	-2.60	61.05
2	6.00	0.80	4.80	11.60	55.68	646.14	0.00	14.40
Σ			22.72		156.03	1395.44		136.49

$$S = 22.72 \text{ m}^2$$

$$y_G = 6.87 \text{ m}$$

$$I_{Gz} = 323.87 \text{ m}^4$$

$$I_{Gy} = 136.49 \text{ m}^4$$

D'où $\tau_3 = 4.98 \text{ MPa} > 4 \text{ MPa}$.

Il faut encore augmenter l'épaisseur de la section.

Avec $e = 1\text{m}$, on a :

e 1.00 m
 h 12.00 m
 b 6.00 m

section	b m	h m	S m ²	y_{Gi} m	m_{yi} m ³	I_{zi} m ⁴	z_{Gi} m	I_{yi} m ⁴
1	1.00	11.00	11.00	5.50	60.50	443.67	2.50	69.67
1'	1.00	11.00	11.00	5.50	60.50	443.67	-2.50	69.67
2	6.00	1.00	6.00	11.50	69.00	794.00	0.00	18.00
Σ			28.00		190.00	1681.33		157.33

S 28.00 m²

y_G 6.79 m

I_{Gz} 392.05 m⁴

I_{Gy} 157.33 m⁴

D'où $\tau_3 = 4.0$ MPa. Une épaisseur de 1m convient.